Sphère et Hyper-sphère, problèmes aux limites à n-dimensions

Problèmes aux limites uni-dimensionnels en dimension radiale

***Problème** : soit à rechercher la solution de l'équation de Laplace à l'intérieur d'une sphère creuse à n dimensions ||x||> 1 dont les conditions aux limites de Dirichlet sont constantes sur les surfaces intérieure et extérieure de l'hypersphère.*

L'équation de Laplace à N dimensions s'écrit :

$$\Delta T\left(\vec{x}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = 0 \quad l_{r1} \le \left\|\vec{x}\right\| \le l_{r2} \quad r = \left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$T\left(\vec{x}\right)\Big|_{\left\|\vec{x}\right\|=l_{r1}} = T_1 \quad T\left(\vec{x}\right)\Big|_{\left\|\vec{x}\right\|=l_{r2}} = T_2$$

Le problème est invariant selon toutes les rotations de l'espace à N dimensions et ne dépend que que la variable r=||x||. Dans ce cas le Laplacien à N dimensions s'écrit en fonction uniquement de la variable r=||x||

$$\Delta T\left(\vec{x}\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial \left\|\vec{x}\right\|^2} + \left(\frac{n-1}{\left\|\vec{x}\right\|}\right)\frac{\partial T}{\partial \left\|\vec{x}\right\|} = 0 \Rightarrow T\left(\left\|\vec{x}\right\|\right) = \begin{cases} A|x| + B & si\ n = 1 \\ ALn(\left\|\vec{x}\right\|) + B & si\ n = 2 \\ A\left\|\vec{x}\right\|^{2-n} + B & si\ n \ge 3 \end{cases}$$

$$Comme\ T\left(\vec{x}\right)\Big|_{\left\|\vec{x}\right\|=l_{r1}} = T_1 \quad T\left(\vec{x}\right)\Big|_{\left\|\vec{x}\right\|=l_{r2}} = T_2 \quad il\ vient$$

$$T\left(\vec{x}\right)\Big|_{\left\|\vec{x}\right\|=l_{r1}} = \begin{cases} \dfrac{1}{l_{r2} - l_{r1}}\left((T_2 - T_1)|x| + T_1 l_{r2} - l_{r1} T_2\right) & si\ n = 1 \\ \dfrac{1}{Ln(l_{r2}) - Ln(l_{r1})}\left((T_2 - T_1)Ln\left(\left\|\vec{x}\right\|\right) + T_1 Ln(l_{r2}) - Ln(l_{r1})T_2\right) & si\ n = 2 \\ \dfrac{1}{l_{r2}^{\ 2-n} - l_{r1}^{\ 2-n}}\left((T_2 - T_1)\left\|\vec{x}\right\|^{2-n} + T_1 l_{r2}^{\ 2-n} - l_{r1}^{\ 2-n} T_2\right) & si\ n \ge 3 \end{cases}$$

***Problème** : soit à rechercher la solution de l'équation de Laplace à l'intérieur d'une sphère creuse à n dimensions ||x||> 1 dont les conditions aux limites sont constantes, homogène de Dirichlet sur la surface intérieure de l'hypersphère et inhomogène mixte de Robin et constante à la surface extérieure.*

L'équation de Laplace à N dimensions s'écrit :

$$\Delta T(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = 0 \quad l_{r1} \le \|\vec{x}\| \le l_{r2} \quad r = \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \Rightarrow T(\|\vec{x}\|) = \begin{cases} A|x| + B & si\ n = 1 \\ A Ln(\|\vec{x}\|) + B & si\ n = 2 \\ A\|\vec{x}\|^{2-n} + B & si\ n \ge 3 \end{cases}$$

$$T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{r1}} = 0 \quad \alpha \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial n} + \beta T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{r2}} = \beta T_2$$

Comme :

$$T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{r1}} = 0 \Rightarrow T(\|\vec{x}\|) = \begin{cases} A\left(|x| - l_{r1}\right) & si\ n = 1 \\ A\ Ln\left(\dfrac{\|\vec{x}\|}{l_{r1}}\right) & si\ n = 2 \\ A\left(\|\vec{x}\|^{2-n} - l_{r1}{}^{2-n}\right) & si\ n \ge 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial n} + \beta T(\vec{x}) = \begin{cases} \alpha\ A + A\ \beta\left(|x| - l_{r1}\right) & si\ n = 1 \\ \dfrac{\alpha\ A}{\|\vec{x}\|} + \beta\ A\ Ln\left(\dfrac{\|\vec{x}\|}{l_{r1}}\right) & si\ n = 2 \\ \alpha\ A(2-n)\|\vec{x}\|^{1-n} + \beta\ A\left(\|\vec{x}\|^{2-n} - l_{r1}{}^{2-n}\right) & si\ n \ge 3 \end{cases}$$

$$\alpha \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial n} + \beta T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{r2}} = \beta T_2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha\ A + A\ \beta\left(l_{r2} - l_{r1}\right) = \beta T_2 & si\ n = 1 \\ \dfrac{\alpha\ A}{l_{r2}} + \beta\ A\ Ln\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) = \beta T_2 & si\ n = 2 \\ \alpha\ A(2-n) l_{r2}{}^{1-n} + \beta\ A\left(l_{r2}{}^{2-n} - l_{r1}{}^{2-n}\right) = \beta T_2 & si\ n \ge 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{\beta T_2}{\alpha + \beta\left(l_{r2} - l_{r1}\right)} & si\ n = 1 \\ A = \dfrac{\beta T_2}{\dfrac{\alpha}{l_{r2}} + \beta\ Ln\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} & si\ n = 2 \\ A = \dfrac{\beta T_2}{\alpha(2-n) l_{r2}{}^{1-n} + \beta\left(l_{r2}{}^{2-n} - l_{r1}{}^{2-n}\right)} & si\ n \ge 3 \end{cases}$$

Il vient

$$T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{r1}} = \begin{cases} \dfrac{\beta T_2}{\alpha + \beta\left(l_{r2} - l_{r1}\right)}\left(|x| - l_{r1}\right) & si\ n = 1 \\ \dfrac{\beta T_2}{\dfrac{\alpha}{l_{r2}} + \beta\ Ln\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} Ln\left(\dfrac{\|\vec{x}\|}{l_{r1}}\right) & si\ n = 2 \\ \dfrac{\beta T_2}{\alpha(2-n) l_{r2}{}^{1-n} + \beta\left(l_{r2}{}^{2-n} - l_{r1}{}^{2-n}\right)}\left(\|\vec{x}\|^{2-n} - l_{r1}{}^{2-n}\right) & si\ n \ge 3 \end{cases}$$

Avec le problème suivant :

$$\Delta T(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}=0 \quad l_{r1}\le\|\vec{x}\|\le l_{r2} \quad r=\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\Rightarrow T(\|\vec{x}\|)=\begin{cases}A|x|+B & si\ n=1\\ ALn(\|\vec{x}\|)+B & si\ n=2\\ A\|\vec{x}\|^{2-n}+B & si\ n\ge 3\end{cases}$$

$$T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{r1}}=T_1 \quad \alpha\frac{\partial T(\vec{x})}{\partial n}+\beta\,T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{r2}}=\beta\,T_2$$

Il vient :

$$T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{r1}}=T_1\Rightarrow T(\|\vec{x}\|)=\begin{cases}T_1+A\left(|x|-l_{r1}\right) & si\ n=1\\ T_1+A\,Ln\left(\dfrac{\|\vec{x}\|}{l_{r1}}\right) & si\ n=2\\ T_1+A\left(\|\vec{x}\|^{2-n}-l_{r1}{}^{2-n}\right) & si\ n\ge 3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\alpha\frac{\partial T(\vec{x})}{\partial n}+\beta T(\vec{x})=\begin{cases}\alpha\ A+A\,\beta\left(|x|-l_{r1}\right)+\beta\,T_1 & si\ n=1\\ \dfrac{\alpha\ A}{\|\vec{x}\|}+\beta\ A\,Ln\left(\dfrac{\|\vec{x}\|}{l_{r1}}\right)+\beta\,T_1 & si\ n=2\\ \alpha\ A(2-n)\|\vec{x}\|^{1-n}+\beta\ A\left(\|\vec{x}\|^{2-n}-l_{r1}{}^{2-n}\right)+\beta\,T_1 & si\ n\ge 3\end{cases}$$

$$\alpha\frac{\partial T(\vec{x})}{\partial n}+\beta\,T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{r2}}=\beta\,T_2\Rightarrow\begin{cases}\alpha\ A+A\,\beta\left(l_{r2}-l_{r1}\right)=\beta\left(T_2-T_1\right) & si\ n=1\\ \dfrac{\alpha\ A}{l_{r2}}+\beta\ A\,Ln\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)=\beta\left(T_2-T_1\right) & si\ n=2\\ \alpha\ A(2-n)l_{r2}{}^{1-n}+\beta\ A\left(l_{r2}{}^{2-n}-l_{r1}{}^{2-n}\right)=\beta\left(T_2-T_1\right) & si\ n\ge 3\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=\dfrac{\beta\left(T_2-T_1\right)}{\alpha+\beta\left(l_{r2}-l_{r1}\right)} & si\ n=1\\ A=\dfrac{\beta\left(T_2-T_1\right)}{\dfrac{\alpha}{l_{r2}}+\beta\ Ln\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} & si\ n=2\\ A=\dfrac{\beta\left(T_2-T_1\right)}{\alpha(2-n)l_{r2}{}^{1-n}+\beta\left(l_{r2}{}^{2-n}-l_{r1}{}^{2-n}\right)} & si\ n\ge 3\end{cases}$$

$$Il\,vient\quad T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{r1}}=\begin{cases}\beta\,T_1+\dfrac{\beta\left(T_2-T_1\right)}{\alpha+\beta\left(l_{r2}-l_{r1}\right)}\left(|x|-l_{r1}\right) & si\ n=1\\ \beta\,T_1+\dfrac{\beta\left(T_2-T_1\right)}{\dfrac{\alpha}{l_{r2}}+\beta\ Ln\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}Ln\left(\dfrac{\|\vec{x}\|}{l_{r1}}\right) & si\ n=2\\ \beta\,T_1+\dfrac{\beta\left(T_2-T_1\right)}{\alpha(2-n)l_{r2}{}^{1-n}+\beta\left(l_{r2}{}^{2-n}-l_{r1}{}^{2-n}\right)}\left(\|\vec{x}\|^{2-n}-l_{r1}{}^{2-n}\right) & si\ n\ge 3\end{cases}$$

***Problème** : soit à rechercher la solution de l'équation de Laplace à l'intérieur d'une sphère creuse à*

n dimensions ||x||> 1 dont les conditions aux limites sont constantes, inhomogène mixte de Robin sur la surface intérieure de l'hypersphère et inhomogène mixte de Robin à la surface extérieure. L'équation de Laplace à N dimensions s'écrit :

$$\Delta T(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = 0 \quad l_{r1} \le \|\vec{x}\| \le l_{r2} \quad r = \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \Rightarrow T(\|\vec{x}\|) = \begin{cases} A|x| + B & si\ n=1 \\ ALn(\|\vec{x}\|) + B & si\ n=2 \\ A\|\vec{x}\|^{2-n} + B & si\ n \ge 3 \end{cases}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial n} - \beta_1 T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{r1}} = -\beta_1 T_1 \quad \alpha_2 \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial n} + \beta_2 T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{r2}} = \beta_2 T_2$$

Comme :

$$\alpha_1 \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial n} - \beta_1 T(\vec{x}) = \begin{cases} \alpha_1 A - \beta_1 (A|x| + B) = A(\alpha_1 - \beta_1 |x|) - \beta_1 B & si\ n=1 \\ \frac{\alpha_1 A}{\|\vec{x}\|} - \beta_1 (ALn(\|\vec{x}\|) + B) = A\left(\frac{\alpha_1}{\|\vec{x}\|} - \beta_1 Ln(\|\vec{x}\|)\right) - \beta_1 B & si\ n=2 \\ \alpha_1 A(2-n)\|\vec{x}\|^{1-n} - \beta_1 \left(A\|\vec{x}\|^{2-n} + B\right) = A\left(\alpha_1 (2-n)\|\vec{x}\|^{1-n} - \beta_1 \|\vec{x}\|^{2-n}\right) - \beta_1 B & si\ n \ge 3 \end{cases}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial n} - \beta_1 T(\vec{x}) = -\beta_1 T_1 \Rightarrow T(\|\vec{x}\|) = \begin{cases} B = \frac{A(\alpha_1 - \beta_1 l_{r1}) + \beta_1 T_1}{\beta_1} = \frac{A(\alpha_1 - \beta_1 l_{r1})}{\beta_1} + T_1 \\ \Leftrightarrow A(\alpha_1 - \beta_1 l_{r1}) = \beta_1 (B - T_1) \quad si\ n=1 \\ B = \frac{A}{\beta_1}\left(\frac{\alpha_1}{l_{r1}} - \beta_1 Ln(l_{r1})\right) + T_1 \quad si\ n=2 \\ B = \frac{A\left(\alpha_1 (2-n) l_{r1}{}^{1-n} - \beta_1 l_{r1}{}^{2-n}\right) + \beta_1 T_1}{\beta_1} = \frac{A\left(\alpha_1 (2-n) l_{r1}{}^{1-n} - \beta_1 l_{r1}{}^{2-n}\right)}{\beta_1} + T_1 \\ si\ n \ge 3 \end{cases}$$

$$\alpha_2 \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial n} + \beta_2 T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{r2}} = \beta_2 T_2 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{\beta_2 (T_2 - B)}{(\alpha_2 + \beta_2 l_{r2})} = \frac{\beta_2 \beta_1 (T_2 - T_1) - \beta_2 A(\alpha_1 - \beta_1 l_{r1})}{\beta_1 (\alpha_2 + \beta_2 l_{r2})} & si\ n=1 \\ A = \frac{\beta_2 (T_2 - B)}{\left(\frac{\alpha_2}{l_{r2}} + \beta_2 Ln(l_{r2})\right)} = \frac{\beta_2 \left(\beta_1 (T_2 - T_1) - A\left(\frac{\alpha_1}{l_{r1}} - \beta_1 Ln(l_{r1})\right)\right)}{\beta_1 \left(\frac{\alpha_2}{l_{r2}} + \beta_2 Ln(l_{r2})\right)} & si\ n=2 \\ A = \frac{\beta_2 (T_2 - B)}{\left(\alpha_2 (2-n) l_{r2}{}^{1-n} + \beta_2 l_{r2}{}^{2-n}\right)} = \frac{\beta_2 \left(\beta_1 (T_2 - T_1) - A\left(\alpha_1 (2-n) l_{r1}{}^{1-n} - \beta_1 l_{r1}{}^{2-n}\right)\right)}{\beta_1 \left(\alpha_2 (2-n) l_{r2}{}^{1-n} + \beta_2 l_{r2}{}^{2-n}\right)} \\ si\ n \ge 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=\dfrac{\beta_1\beta_2(T_2-T_1)}{\beta_1(\alpha_2+\beta_2 l_{r2})+\beta_2(\alpha_1-\beta_1 l_{r1})} \quad B=\dfrac{A(\alpha_1-\beta_1 l_{r1})}{\beta_1}+T_1 \quad si\ n=1 \\ \Rightarrow T(\|\vec{x}\|)=A|x|+B=T_1+A\left(|x|+\dfrac{(\alpha_1-\beta_1 l_{r1})}{\beta_1}\right) \\ A=\dfrac{\beta_1\beta_2(T_2-T_1)}{\beta_1\left(\dfrac{\alpha_2}{l_{r2}}+\beta_2 Ln(l_{r2})\right)+\beta_2\left(\dfrac{\alpha_1}{l_{r1}}-\beta_1 Ln(l_{r1})\right)} \quad B=\dfrac{A}{\beta_1}\left(\dfrac{\alpha_1}{l_{r1}}-\beta_1 Ln(l_{r1})\right)+T_1 \quad si\ n=2 \\ A=\dfrac{\beta_1\beta_2(T_2-T_1)}{\beta_1\left(\alpha_2(2-n)l_{r2}{}^{1-n}+\beta_2 l_{r2}{}^{2-n}\right)+\beta_2\left(\alpha_1(2-n)l_{r1}{}^{1-n}-\beta_1 l_{r1}{}^{2-n}\right)} \quad B=\dfrac{A\left(\alpha_1(2-n)l_{r1}{}^{1-n}-\beta_1 l_{r1}{}^{2-n}\right)}{\beta_1}+T_1 \quad si\ n\geq 3 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} A=\dfrac{\beta_1\beta_2(T_2-T_1)}{\beta_1(\alpha_2+\beta_2 l_{r2})+\beta_2(\alpha_1-\beta_1 l_{r1})} \\ B=\dfrac{\beta_2(T_2-T_1)}{\beta_1(\alpha_2+\beta_2 l_{r2})+\beta_2(\alpha_1-\beta_1 l_{r1})}(\alpha_1-\beta_1 l_{r1})+T_1 \quad si\ n=1 \\ A=\dfrac{\beta_1\beta_2(T_2-T_1)}{\beta_1\left(\dfrac{\alpha_2}{l_{r2}}+\beta_2 Ln(l_{r2})\right)+\beta_2\left(\dfrac{\alpha_1}{l_{r1}}-\beta_1 Ln(l_{r1})\right)} \\ B=\dfrac{\beta_2(T_2-T_1)}{\beta_1\left(\dfrac{\alpha_2}{l_{r2}}+\beta_2 Ln(l_{r2})\right)+\beta_2\left(\dfrac{\alpha_1}{l_{r1}}-\beta_1 Ln(l_{r1})\right)}\left(\dfrac{\alpha_1}{l_{r1}}-\beta_1 Ln(l_{r1})\right)+T_1 \quad si\ n=2 \\ A=\dfrac{\beta_1\beta_2(T_2-T_1)}{\beta_1\left(\alpha_2(2-n)l_{r2}{}^{1-n}+\beta_2 l_{r2}{}^{2-n}\right)+\beta_2\left(\alpha_1(2-n)l_{r1}{}^{1-n}-\beta_1 l_{r1}{}^{2-n}\right)} \\ B=\dfrac{\beta_2\left(\alpha_1(2-n)l_{r1}{}^{1-n}-\beta_1 l_{r1}{}^{2-n}\right)}{\beta_1\left(\alpha_2(2-n)l_{r2}{}^{1-n}+\beta_2 l_{r2}{}^{2-n}\right)+\beta_2\left(\alpha_1(2-n)l_{r1}{}^{1-n}-\beta_1 l_{r1}{}^{2-n}\right)}+T_1 \quad si\ n\geq 3 \end{cases}$$

$$T(\|\vec{x}\|)=\begin{cases} T_1+\dfrac{\beta_1\beta_2(T_2-T_1)}{(\alpha_2+\beta_2 l_{r2})+\beta_2(\alpha_1-\beta_1 l_{r1})}\left(|x|+\dfrac{(\alpha_1-\beta_1 l_{r1})}{\beta_1}\right) \quad si\ n=1 \\ T_1+\dfrac{\beta_1\beta_2(T_2-T_1)}{\beta_1\left(\dfrac{\alpha_2}{l_{r2}}+\beta_2 Ln(l_{r2})\right)+\beta_2\left(\dfrac{\alpha_1}{l_{r1}}-\beta_1 Ln(l_{r1})\right)}\left(Ln(\|\vec{x}\|)+\dfrac{\left(\dfrac{\alpha_1}{l_{r1}}-\beta_1 Ln(l_{r1})\right)}{\beta_1}\right) \quad si\ n=2 \\ T_1+\dfrac{\beta_1\beta_2(T_2-T_1)}{\beta_1\left(\alpha_2(2-n)l_{r2}{}^{1-n}+\beta_2 l_{r2}{}^{2-n}\right)+\beta_2\left(\alpha_1(2-n)l_{r1}{}^{1-n}-\beta_1 l_{r1}{}^{2-n}\right)}\left(\|\vec{x}\|^{2-n}+\dfrac{\left(\alpha_1(2-n)l_{r1}{}^{1-n}-\beta_1 l_{r1}{}^{2-n}\right)}{\beta_1}\right) \quad si\ n\geq \end{cases}$$

.

Solutions de l'équation de Laplace à l'extérieur d'un domaine Ω hypersphérique

***Problème** : soit à rechercher la solution de l'équation de Laplace à l'extérieur d'une sphère à n dimensions ||x||> $l_{\|\vec{x}\|}$ dont les conditions aux limites de Dirichlet sont constantes sur la surface de l'hypersphère.*

L'équation de Laplace à N dimensions s'écrit :

$$\Delta T(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = 0 \quad \|\vec{x}\| \geq l_{\|\vec{x}\|} \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{\|\vec{x}\|}} = 1 \quad T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=\infty} = 0$$

Le problème est invariant selon toutes les rotations de l'espace à N dimensions et ne dépend que que la variable r=||x||. Dans ce cas le Laplacien à N dimensions s'écrit en fonction uniquement de la variable r=||x|| :

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad T(\vec{x}) = T(\|\vec{x}\|) \quad \Delta T(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{\|\vec{x}\|}\frac{\partial T}{\partial \|\vec{x}\|}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\|\vec{x}\|^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \|\vec{x}\|^2} + \left(\frac{1}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_i^2}{\|\vec{x}\|^3}\right)\frac{\partial T}{\partial \|\vec{x}\|} =$$

$$= \frac{\partial^2 T}{\partial \|\vec{x}\|^2} + \frac{\partial T}{\partial \|\vec{x}\|}\left(\frac{n-1}{\|\vec{x}\|}\right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \|\vec{x}\|^2} + \frac{\partial T}{\partial \|\vec{x}\|}\left(\frac{n-1}{\|\vec{x}\|}\right) = 0 \Rightarrow T(\|\vec{x}\|) = \begin{cases} A|x| + B & si\ n=1 \\ ALn(\|\vec{x}\|) + B & si\ n=2 \\ A\|\vec{x}\|^{2-n} + B & si\ n \geq 3 \end{cases}$$

$$Si\ T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=l_{\|\vec{x}\|}} = 1 \Rightarrow T(\|\vec{x}\|) = \begin{cases} pas\ de\ solution & si\ n=1,2 \\ \left(\frac{l_{\|\vec{x}\|}}{\|\vec{x}\|}\right)^{n-2} & si\ n \geq 3 \end{cases}$$

$$Si\ la\ solution\ doit\ rester\ bornée\ à\ l'infini\ T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=\infty} bornée \Rightarrow T(\|\vec{x}\|) = \begin{cases} 1 & si\ n=1,2 \\ \left(\frac{l_{\|\vec{x}\|}}{\|\vec{x}\|}\right)^{n-2} & si\ n \geq 3 \end{cases}$$

$$Si\ la\ solution\ est\ non\ bornée\ à\ l'infini\ T(\vec{x})\Big|_{\|\vec{x}\|=\infty} bornée \Rightarrow T(\|\vec{x}\|) = \begin{cases} \frac{|x|}{l_{\|\vec{x}\|}} \quad si\ n=1 \quad \frac{Ln(\|\vec{x}\|)}{Ln(l_{\|\vec{x}\|})} & si\ n=2 \\ \left(\frac{l_{\|\vec{x}\|}}{\|\vec{x}\|}\right)^{n-2} & si\ n \geq 3 \end{cases}$$

Problèmes aux limites de Laplace sur une hypersphère avec dépendance à une des co-latitudes

Dans ce qui précède on s'est limité à une simple dépendance radiale des problèmes au limites sur l'hypersphère, en partie parce que la prise en compte de variables angulaires est une tâche plus ardue.

Introduisons le système de coordonnées hyper-sphériques ou ultra-sphériques, comme suit, en changeant un peu l'ordre classique des variables angulaires afin d'exprimer plus facilement l'opérateur de moment angulaire :

$$
\begin{aligned}
& r = \|x\| \\
& x_1 = rCos(\vartheta_n) \quad \vartheta_n \in [0,\pi] \\
& x_2 = rSin(\vartheta_n)Cos(\vartheta_{n-1}) \quad \vartheta_{n-1} \in [0,\pi] \\
& x_3 = rSin(\vartheta_n)Sin(\vartheta_{n-1})Cos(\vartheta_{n-2}) \quad \vartheta_{n-2} \in [0,\pi] \\
& \ldots \\
& x_{n-1} = rSin(\vartheta_n)Sin(\vartheta_{n-1})\cdots Sin(\vartheta_3)Cos(\vartheta_2) \quad \vartheta_3 \in [0,\pi] \\
& x_n = rSin(\vartheta_n)Sin(\vartheta_{n-1})\cdots Sin(\vartheta_3)Sin(\vartheta_2) \quad \vartheta_2 = \varphi \in [0,2\pi] \\
& \vartheta_2 = \varphi \to hyperlongitude \\
& \vartheta_n, \vartheta_{n-1}, \cdots \vartheta_3 \to hypercolatitude
\end{aligned}
$$

Le laplacien dans ce système ultra-sphérique revêt la forme suivante :

$$
\Delta_n = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}L^2
$$

$$
L_n^2 \quad \textit{opérateur différentiel de moment angulaire}
$$

$$
L_n^2 = \sum_{i=2}^{n}\left(\prod_{\substack{j=i+1 \\ j\le n}}^{n}\frac{1}{Sin^2(\vartheta_j)}\right)\frac{1}{Sin^{i-2}(\vartheta_i)}\frac{\partial}{\partial\vartheta_i}\left(Sin^{i-2}(\vartheta_i)\frac{\partial}{\partial\vartheta_i}\right)
$$

Prenons par exemple la troisième et la quatrième dimension, il vient :

$$
L_3^2 = \frac{1}{Sin(\vartheta_3)}\frac{\partial}{\partial\vartheta_3}\left(Sin(\vartheta_3)\frac{\partial}{\partial\vartheta_3}\right) + \frac{1}{Sin^2(\vartheta_3)}\frac{\partial^2}{\partial^2\vartheta_2}
$$

$$
L_4^2 = \frac{1}{Sin^2(\vartheta_4)}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta_4}\left(Sin^2(\vartheta_4)\frac{\partial}{\partial\vartheta_4}\right) + \frac{1}{Sin^2(\vartheta_4)}\frac{1}{Sin(\vartheta_3)}\frac{\partial}{\partial\vartheta_3}\left(Sin(\vartheta_3)\frac{\partial}{\partial\vartheta_3}\right) + \frac{1}{Sin^2(\vartheta_3)Sin^2(\vartheta_4)}\frac{\partial^2}{\partial^2\vartheta_2}\right)
$$

Dans la suite on se contente d'étudier des problèmes aux limites ne dépendant que du rayon et d'une seule variable angulaire. D'après les exemples précédents et la formule plus générale du moment angulaire, l'opérateur différentiel ne présente de dépendance qu'en un seul angle unique,la dernière colatitude ϑn. Tous les autres termes ont une dépendance croisée en au moins deux angles différent.

Donc pour réduire l'étude sur l'hypersphère à deux dimensions, on choisit des catégories de problèmes aux limites dont la dépendance des conditions aux limites ne dépend que de r et ϑn. Et dans ce cas le laplacien devient :

$$\Delta_n = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{Sin^{n-2}(\vartheta_n)}\frac{\partial}{\partial \vartheta_n}\left(Sin^{n-2}(\vartheta_n)\frac{\partial}{\partial \vartheta_n}\right)$$

$$\Delta_n T(r,\vartheta_n)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial T(r,\vartheta_n)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{Sin^{n-2}(\vartheta_n)}\frac{\partial}{\partial \vartheta_n}\left(Sin^{n-2}(\vartheta_n)\frac{\partial T(r,\vartheta_n)}{\partial \vartheta_n}\right)=0$$

On va simplifier la notation de la variable angulaire, et procéder à la séparation des variables de cette équation, il vient :

$$\Delta_n T(r,\vartheta)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial T(r,\vartheta)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{Sin^{n-2}(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(Sin^{n-2}(\vartheta)\frac{\partial T(r,\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)=0$$

$$T(r,\vartheta)=R(r)\Theta(\vartheta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R(r)r^{n-3}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)=-\frac{1}{\Theta(\vartheta)Sin^{n-2}(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(Sin^{n-2}(\vartheta)\frac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)=\alpha$$

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)-\alpha\frac{R(r)}{r^2}=0 \quad choix\ \alpha>0$$

$$En\ posant\ \alpha=\nu(\nu+n-2)\Rightarrow R(r)=A_r r^{\nu}+B_r r^{-(\nu+n-2)}$$

$$\frac{1}{Sin^{n-2}(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(Sin^{n-2}(\vartheta)\frac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)+\nu(\nu+n-2)\Theta(\vartheta)=0$$

En effectuant le changement de variable z=Cos(ϑ), on parvient à deux formes de l'équation :

$$z=Cos(\vartheta) \quad dz=Sin(\vartheta)d\vartheta$$

$$\frac{1}{Sin^{n-2}(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(Sin^{n-2}(\vartheta)\frac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)+\nu(\nu+n-2)\Theta(\vartheta)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{n-3}{2}}}\frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{d\Theta(z)}{dz}\right)+\nu(\nu+n-2)\Theta(z)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-z^2\right)\frac{d^2\Theta(z)}{dz^2}-(n-1)z\frac{d\Theta(z)}{dz}+\nu(\nu+n-2)\Theta(z)=0$$

Cette équation n'a aucun caractère de nouveauté, on l'appelle l'équation différentielle de Gegenbauer, établie vers 1893. Comme bien des équations différentielles du second degré, elles possèdent deux solutions (première espèce, deuxième espèce), linéairement indépendantes. Lorsque le paramètre ν est un entier, alors les solutions de première espèces sont les polynômes de Gegenbauer. Mais pour tout type de problèmes aux limites, il n'y pas de raison valable de se restreindre uniquement à des paramètres entiers. Aussi parlerons-nous de fonctions de Gegenbauer, comme extension des polynômes de Gegenbauer pour les paramètres entiers.

Il est à remarquer que le choix positif de la variable de séparation α > 0 correspond à des problèmes aux limites :
- soit homogène dans la dimension angulaire ϑ,
- soit inhomogène en dimension radiale, sur un intervalle angulaire complet ϑ ε [0,π], là où il existe une base complète de fonction (les polynômes de Gegenbauer) avec des valeurs propres entières.

<u>Solution des problèmes aux limites homogènes en dimension radiale</u>

La partie radiale se présente ainsi :

$$Choix\ \alpha = -\mu^2$$

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\mu^2\frac{R(r)}{r^2}=0 \quad et \quad \frac{1}{Sin^{n-2}(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin^{n-2}(\vartheta)\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)-\mu^2\Theta(\vartheta)=0$$

$$Posons\ r=e^t \Leftrightarrow t=Log(r) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}=\frac{dt}{dr}\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}=e^{-t}\frac{\partial}{\partial t} \quad R(r)=r^{-\alpha}U(t)=e^{-\alpha t}U(t)$$

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\mu^2\frac{R(r)}{r^2}=0 \Rightarrow e^{-nt}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{(n-2)t}\frac{\partial\left(e^{-\alpha t}U(t)\right)}{\partial t}\right)+\mu^2 e^{-(\alpha+2)t}U(t)=0$$

$$Il\ vient \quad \frac{\partial^2U(t)}{\partial t^2}+(n-2-2\alpha)\frac{\partial U(t)}{\partial t}+\left(\mu^2+\alpha^2-\alpha(n-2)\right)U(t)=0$$

$$Solution\ sinuso\ddot{i}dale\ si \quad \alpha=\frac{n-2}{2} \quad et \quad \mu^2-\left(\frac{n-2}{2}\right)^2=\nu^2>0$$

$$\frac{\partial^2U(t)}{\partial t^2}+\left(\mu^2-\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right)U(t)=0 \Rightarrow U(t)=A\,Cos(\nu\,t)+B\,Sin(\nu\,t)$$

$$Posons\ \lambda=\frac{n-2}{2} \Rightarrow R(r)=r^{-\alpha}U(Log(r))=\frac{A\,Cos(\nu\,Log(r))+B\,Sin(\nu\,Log(r))}{r^{\lambda}}$$

Pour la partie angulaire :

$$Partie\ angulaire \leftarrow \mu^2=\nu^2+\lambda^2 \quad Posons \quad z=Cos(\vartheta) \quad dz=Sin(\vartheta)d\vartheta$$

$$\frac{1}{Sin^{n-2}(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin^{n-2}(\vartheta)\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)-\left(\nu^2+\lambda^2\right)\Theta(\vartheta)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-z^2\right)\frac{d^2\Theta(z)}{dz^2}-(n-1)\,z\,\frac{d\Theta(z)}{dz}-\left(\nu^2+\lambda^2\right)\Theta(z)=0$$

$$\Theta(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{3-n}{4}}y(z) \Rightarrow \left(1-z^2\right)y''(z)-2z\,y'(z)-\left(\nu^2+\lambda^2\right)y(z)=0$$

$$Solution \quad \Theta(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{3-n}{4}}\left(A\,P^{\pm\frac{n-3}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+B\,Q^{\pm\frac{n-3}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right) \Leftrightarrow \Theta(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\left(A\,P^{\pm\frac{2\lambda-1}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+B\,Q^{\pm\frac{2\lambda-1}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right)$$

La partie angulaire est donc une fonction conique de Mehler ! Mais laissons cet aspect des solutions possibles pour revenir aux solutions pour la variable de séparation α > 0

<u>Solution des problèmes aux limites homogènes en dimension angulaire ou « inhomogènes en dimension radiale sur l'intervalle angulaire complet [0,π] »</u>

C'est le cas le plus général qui aboutit aux fonctions de Gegenbauer qui sont plus connues comme solution de première espèce de l'équation différentielle (juste une normalisation différente du paramètre dimensionnel :

$$\left(1-z^2\right)\frac{d^2\Theta(z)}{dz^2}-(2\lambda+1)\,z\,\frac{d\Theta(z)}{dz}+\nu\left(\nu+2\lambda\right)\Theta(z)=0$$

Il est clair qu'en posant comme paramètre λ la valeur (n-2)/2, on obtient l'équation différentielle précédente. Si maintenant nous partons de l'équation différentielle de Gegenbauer, et introduisons un changement de fonction sous la forme :

$$\left(1-z^2\right)\frac{d^2\Theta(z)}{dz^2}-(2\lambda+1)\,z\,\frac{d\Theta(z)}{dz}+\nu\left(\nu+2\lambda\right)\Theta(z)=0\rightarrow\Theta(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}y(z)$$

$$y(z)\quad solution\ de:\quad \left(1-z^2\right)y''(z)-2z\ y'(z)+\left(\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)-\frac{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}{\left(1-z^2\right)}\right)\Theta(z)=0$$

$$\Leftrightarrow y(z)=C_1P^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)+C_2Q^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)$$

$P^{\nu}_{\mu}(z), Q^{\nu}_{\mu}(z)$ *fonctions associées de Legendre de première et deuxième espèce*

$$De\ m\hat{e}me\ pour\ l'\acute{e}quation\ \left(1-z^2\right)\frac{d^2\Theta(z)}{dz^2}-2(\lambda+1)z\,\frac{d\Theta(z)}{dz}+\left(\nu-\lambda\right)\left(\nu+\lambda+1\right)\Theta(z)=0$$

$$\Theta(z)=\left(1-z^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}y(z)$$

$$y(z)\quad solution\ de:\quad \left(1-z^2\right)y''(z)-2z\ y'(z)+\left(\nu\left(\nu+1\right)-\frac{\lambda^2}{\left(1-z^2\right)}\right)\Theta(z)=0$$

$$\Leftrightarrow y(z)=C_1P^{\lambda}_{\nu}(z)+C_2Q^{\lambda}_{\nu}(z)\Leftrightarrow\Theta(z)=\left(1-z^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}\left(C_1P^{\lambda}_{\nu}(z)+C_2Q^{\lambda}_{\nu}(z)\right)$$

Donc deux solutions indépendantes de l'équation de Gegenbauer sont :

$$\left(1-z^2\right)y''(z)-(2\lambda+1)\,z\,y'(z)+\nu\left(\nu+2\lambda\right)y(z)=0$$

$$y(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\left(C_1P^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)+C_2Q^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)\right)\quad or\quad \frac{1-2\lambda}{4}=\frac{3-n}{4}$$

$$\Rightarrow y(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{3-n}{4}}\left(C_1P^{\frac{3-n}{2}}_{\frac{n-3+2\nu}{2}}(z)+C_2Q^{\frac{3-n}{2}}_{\frac{n-3+2\nu}{2}}(z)\right)$$

Construction des fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce sur l'intervalle [-1,1]

Les fonctions de Gegenbauer de première espèce peuvent se définir comme étant les solutions de première espèce de l'équation différentielle. Et suivant la normalisation communément admise, on écrit la relation avec les fonctions associées de Legendre comme suit :

$$(1-z^2)y''(z)-(2\lambda+1)\,z\,y'(z)+\nu(\nu+2\lambda)y(z)=0$$

$$y(z)=(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\left(C_1P^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)+C_2Q^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)\right)\quad or\quad \frac{1-2\lambda}{4}=\frac{3-n}{4}$$

$$\Rightarrow C^{\lambda}_{\nu}(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)\quad C^{\frac{n-2}{2}}_{\nu}(z)=\frac{2^{\frac{3-n}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+n-2)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}(1-z^2)^{\frac{3-n}{4}}P^{\frac{3-n}{2}}_{\frac{n-3+2\nu}{2}}(z)$$

$$Notation\quad C^{\lambda}_{(Q),\nu}(z)\ des\ fonctions\ de\ deuxième\ espèce$$

Pour les fonctions de deuxième espèce, on pourrait les définir comme les solutions e deuxième espèce construite précédemment :

$$C^{\lambda}_{(Q),\nu}(z)\ fonctions\ de\ deuxième\ espèce$$

$$\Rightarrow C^{\lambda}_{(Q),\nu}(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)\quad z\in\,]-1,1[$$

Cela entraine les formules inverses des fonctions de Gegenbauer vers les fonctions de Legendre associées :

$$\lambda'+\nu'-\frac{1}{2}=\nu\quad \frac{1}{2}-\lambda'=\mu\Leftrightarrow\lambda'=\frac{1}{2}-\mu\quad \nu'=\nu+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\mu\right)=\nu+\mu\quad 2\lambda'=1-2\mu$$

$$C^{\lambda'}_{\nu'}(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda'}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu'+2\lambda')}{\Gamma(\nu'+1)\Gamma(\lambda')}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda'}{4}}P^{\frac{1}{2}-\lambda'}_{\lambda'+\nu'-\frac{1}{2}}(z)\quad z\in\,]-1,1[$$

$$\Rightarrow P^{\mu}_{\nu}(z)=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}{\Gamma(\nu-\mu+1)2^{\mu}\sqrt{\pi}}\frac{C^{\frac{1}{2}-\mu}_{\nu+\mu}(z)}{(1-z^2)^{\frac{\mu}{2}}}\qquad \Gamma(1-2\mu)=\frac{1}{2^{2\mu}\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1-2\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-2\mu}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P^{\mu}_{\nu}(z)=2^{\mu}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(1-2\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(1-\mu)}\frac{C^{\frac{1}{2}-\mu}_{\nu+\mu}(z)}{(1-z^2)^{\frac{\mu}{2}}}\quad Q^{\mu}_{\nu}(z)=2^{\mu}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(1-2\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(1-\mu)}\frac{C^{\frac{1}{2}-\mu}_{(Q),\nu+\mu}(z)}{(1-z^2)^{\frac{\mu}{2}}}$$

Lorsque le paramètre est entier, alors les fonctions de Gegenbauer sont des polynômes. Pour la suite reprenons une approche similaire à celle de Lebedev pour introduire les fonctions de première espècev de Legendre et polynômes du même nom (N.N.Lebedev-SPECIAL FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS, Prentice Hall 1965).

Ce dernier introduit le lien des solutions avec les fonctions hypergéométriques, en transformant l'équation de départ en équation différentielle hypergéométrique :

$$t=\frac{1}{2}(1-z)\Rightarrow\left(1-z^2\right)y''(z)-(n-1)\,z\,y'(z)+\nu\left(\nu+n-2\right)y(z)=0$$

$$\Leftrightarrow t(1-t)y''(t)+\frac{(n-1)}{2}(1-2t)\,y'(t)+\nu\left(\nu+n-2\right)y(t)=0$$

Equation hypergéométrique ${}_2F_1$

$$t(1-t)y''(t)+(\gamma-(\alpha+\beta+1)t)\,y'(t)-\alpha\,\beta\,y(t)=0$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=-\nu\\ \beta=\left(\nu+n-2\right)\\ \gamma=\dfrac{(n-1)}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Solution\ y(t)={}_2F_1\left(-\nu,\nu+n-2;\dfrac{n-1}{2};t\right)\Leftrightarrow y(z)={}_2F_1\left(-\nu,\nu+n-2;\dfrac{n-1}{2};\dfrac{1-z}{2}\right)\\ Valable\ pour\ |z|\leq 1\end{array}\right.$$

Donc la première solution sur l'intervalle [-1,1], soit celle de première espèce, est proportionnelle à :

$$C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z)\propto{}_2F_1\left(-\nu,\nu+n-2;\frac{n-1}{2};\frac{1-z}{2}\right)\quad\lambda=\frac{n-2}{2}\quad or\ z=1\rightarrow{}_2F_1\left(-\nu,\nu+n-2;\frac{n-1}{2};0\right)=1$$

$$et\quad C_\nu^\lambda(1)=\frac{\Gamma\left(\nu+2\lambda\right)}{\Gamma\left(\nu+1\right)\Gamma\left(2\lambda\right)}\Rightarrow C_\nu^\lambda(z)=\frac{\Gamma\left(\nu+2\lambda\right)}{\Gamma\left(\nu+1\right)\Gamma\left(2\lambda\right)}\ {}_2F_1\left(-\nu,\nu+2\lambda;\lambda+\frac{1}{2};\frac{1-z}{2}\right)$$

$$C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z)=\frac{\Gamma\left(\nu+n-2\right)}{\Gamma\left(\nu+1\right)\Gamma\left(n-2\right)}\ {}_2F_1\left(-\nu,\nu+n-2;\frac{n-1}{2};\frac{1-z}{2}\right)$$

De plus les solutions ont deux propriétés supplémentaires dues à l'invariance de l'équation différentielle :

$$C_\nu^\lambda(z)\ solution\Rightarrow C_{2-\nu-n}^\lambda(z)\ solution$$
$$C_{(Q),\nu}^\lambda(z)\ solution\Rightarrow C_{(Q),2-\nu-n}^\lambda(z)\ solution$$

Les deux solutions de l'équation de Gegenbauer ont été construites sur l'intervalle [-1,+1]. Même si les problèmes aux limites exposés ici ne concernent que cet intervalle, on peut parler de leur continuation analytique au delà, sur l'intervalle]1,∞[.

<u>Construction d'une seconde solution indépendante de l'équation de Gegenbauer sur l'intervalle 1<z<∞</u>

Les deux solutions dans l'intervalle [-1,+1] peuvent être prolongées analytiquement notamment pour z>1, en utilisant la prolongation analytique des fonctions de Legendre associées. Dans ce cas les fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce possèdent les définitions suivantes :

$$C_\nu^\lambda(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)\quad z>1$$

$$C_{(Q),\nu}^\lambda(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)\quad z>1$$

Les fonctions de Legendre associées de première espèce sont à valeur réelle lorsque z>1. Mais il n'en n'est pas de même pour la fonction de Legendre associées de deuxième espèce. Dont la valeur est imaginaire. Pour illustrer la valeur imaginaire prenons le développement en fonction hypergéométrique de la fonction de Legendre associée de deuxième espèce, selon les formules connues sur z >1 (voir NIST Handbook of Mathematical Functions, Legendre Functions, formules 14.3.7, voir aussi formules données par les tableaux pages 134 et 135 de A.Erdelyi.H.Bateman « HIGHER_TRANSCENDENTAL_FUNCTIONS_VOL_I » en formule 41 :

$$Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)z^{\nu+\mu+1}}\left(z^2-1\right)^{\frac{\mu}{2}}{}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu+2}{2},\frac{\nu+\mu+1}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right)\qquad \nu+\mu\neq-1,-2,-3$$

Et en formule 39 :

$$Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\left(z^2-1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}{}_2F_1\left(\frac{\nu+1-\mu}{2},\frac{\nu+1+\mu}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{1-z^2}\right)$$

et 14.3.19, voir aussi les formules données par les tableaux pages 132 et 133 de A.Erdelyi.H.Bateman « HIGHER_TRANSCENDENTAL_FUNCTIONS_VOL_I » en formule 37 :

$$Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}2^\nu\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)}(z+1)^{\frac{\mu}{2}}(z-1)^{-\frac{\mu}{2}-\nu-1}\;{}_2F_1\left(\nu+1,\nu+\mu+1;2\nu+2;\frac{2}{1-z}\right)$$

Et en formule 36 :

$$Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}2^\nu\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)}(z+1)^{\frac{\mu}{2}-\nu-1}(z-1)^{-\frac{\mu}{2}}\;{}_2F_1\left(\nu+1,\nu-\mu+1;2\nu+2;\frac{2}{1+z}\right)$$

La valeur imaginaire est donc essentiellement créée par le facteur multiplicatif : $e^{i\mu\pi}$ *. Injectons la première formule dans la solution de deuxième espèce de l'équation de Gegenbauer, il vient :*

$$\begin{cases} C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) \qquad 1<z<\infty \\ Q_{\nu}^{\mu}(z)=e^{i\mu\pi}\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)z^{\nu+\mu+1}}\left(z^2-1\right)^{\frac{\mu}{2}}{}_2F_1\left(\dfrac{\nu+\mu+2}{2},\dfrac{\nu+\mu+1}{2};\nu+\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{z^2}\right) \qquad \nu+\mu\neq-1,-2,-3 \qquad 1<z<\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)=e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{2^{\lambda+\nu+\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda+\nu+1)\,z^{\nu+1}}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}{}_2F_1\left(\frac{\nu+2}{2},\frac{\nu+1}{2};\lambda+\nu+1;\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}\frac{\pi\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{2^{2\lambda+\nu}\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+\nu+1)\,z^{\nu+2\lambda}}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}{}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}+1,\frac{\nu+1}{2};\lambda+\nu+1;\frac{1}{z^2}\right) \qquad \nu\neq-1,-2,-3 \qquad 1<z<\infty$$

Pour la deuxième formule, il vient :

$$\begin{cases} C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) \qquad 1<z<\infty \\ Q_{\nu}^{\mu}(z)=e^{i\mu\pi}\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\left(z^2-1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}{}_2F_1\left(\dfrac{\nu+\mu+1}{2},\dfrac{\nu-\mu+1}{2};\nu+\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{1-z^2}\right) \qquad 1<z<\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)=e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{2^{\lambda+\nu+\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda+\nu+1)}\left(z^2-1\right)^{-\frac{2\lambda+2\nu+1}{4}}{}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{2\lambda+\nu}{2};\lambda+\nu+1;\frac{1}{1-z^2}\right)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}\pi\frac{2^{-2\lambda-\nu}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\lambda+\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{-\frac{2\lambda+\nu}{2}}{}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{2\lambda+\nu}{2};\lambda+\nu+1;\frac{1}{1-z^2}\right) \qquad \nu\neq-1,-3,\ldots \qquad 1<z<\infty$$

Injectons maintenant la troisième formule dans la solution de deuxième espèce de l'équation de Gegenbauer, il vient :

$$\begin{cases} C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) \qquad 1<z<\infty \\ Q_{\nu}^{\mu}(z)=e^{i\mu\pi}2^{\nu}\Gamma(\nu+\mu+1)\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)}(z+1)^{\frac{\mu}{2}}(z-1)^{-\frac{\mu}{2}-\nu-1}\ {}_2F_1\left(\nu+1,\nu+\mu+1;2\nu+2;\dfrac{2}{1-z}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)=2^{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\lambda+2\nu+1)}(z+1)^{\frac{1-2\lambda}{4}}(z-1)^{-\frac{3+2\lambda}{4}-\nu}{}_2F_1\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2},\nu+1;2\lambda+2\nu+1;\frac{2}{1-z}\right)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\frac{2^{\nu}e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda+2\nu+1)}(z-1)^{-\frac{1}{2}-\nu-\lambda}(z+1)^{\frac{1-2\lambda}{2}}{}_2F_1\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2},\nu+1;2\lambda+2\nu+1;\frac{2}{1-z}\right)$$

$$\textit{De plus}\quad {}_2F_1\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2},\nu+1;2\lambda+2\nu+1;\frac{2}{1-z}\right)=\left(\frac{1+z}{z-1}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}{}_2F_1\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2},2\lambda+\nu;2\lambda+2\nu+1;\frac{2}{1-z}\right)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\frac{2^{\nu}e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda+2\nu+1)}(z-1)^{-\nu-2\lambda}{}_2F_1\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2},2\lambda+\nu;2\lambda+2\nu+1;\frac{2}{1-z}\right)$$

$$\textit{Enfin}\quad \Gamma(2\lambda+2\nu+1)=\frac{2^{2\lambda+2\nu}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda+\nu+1)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\frac{2^{-\nu-2\lambda}e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}\pi\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+\nu+1)}(z-1)^{-\nu-2\lambda}{}_2F_1\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2},2\lambda+\nu;2\lambda+2\nu+1;\frac{2}{1-z}\right)\qquad 1<z<\infty$$

Et la quatrième formule dans la solution de deuxième espèce de l'équation de Gegenbauer, il vient :

$$\begin{cases} C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) \qquad 1<z<\infty \\ Q_{\nu}^{\mu}(z)=e^{i\mu\pi}2^{\nu}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)}(z+1)^{\frac{\mu}{2}-\nu-1}(z-1)^{-\frac{\mu}{2}}\ {}_2F_1\left(\nu+1,\nu-\mu+1;2\nu+2;\dfrac{2}{1+z}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)=2^{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\lambda+2\nu+1)}(z+1)^{-\frac{1+6\lambda}{4}-\nu}(z-1)^{-\frac{1-2\lambda}{4}}{}_2F_1\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2},2\lambda+\nu;2\lambda+2\nu+1;\frac{2}{1+z}\right)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\frac{2^{\nu}e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda+2\nu+1)}(z+1)^{-2\lambda-\nu}{}_2F_1\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2},2\lambda+\nu;2\lambda+2\nu+1;\frac{2}{1+z}\right)$$

$$\textit{Enfin}\quad \Gamma(2\lambda+2\nu+1)=\frac{2^{2\lambda+2\nu}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda+\nu+1)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\frac{2^{-\nu-2\lambda}e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}\pi\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+\nu+1)}(z+1)^{-2\lambda-\nu}{}_2F_1\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2},2\lambda+\nu;2\lambda+2\nu+1;\frac{2}{1+z}\right)\qquad 1<z<\infty$$

Toujours en s'inspirant des travaux de Lebedev, réalisons une transformation de variables et de la solution cherchée dans l'équation de départ, en travaillant avec le paramètre de dimension n :

$$t=\frac{1}{z^2}\,;\; y(z)=z^{-\alpha}u(t)\Rightarrow t^{\alpha/2}u(t)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy(z)}{dz}=-2t^{3/2}\,\dfrac{d(t^{\alpha/2}u(t))}{dt}\\ \dfrac{d^2y(z)}{dz^2}=-2t^{3/2}\,\dfrac{d}{dt}\left(-2t^{3/2}\,\dfrac{d(t^{\alpha/2}u(t))}{dt}\right)\end{cases}$$

$$\left(1-z^2\right)y''(z)+(1-n)\,z\,y'(z)+\nu(\nu+n-2)y(z)=0\quad avec\quad \alpha=\nu+n-2=\nu+2\lambda$$

$$\Leftrightarrow t(1-t)u''(t)+\left[\frac{2\nu+n}{2}-\frac{2\nu+2n-1}{2}t\right]u'(t)-\left(\frac{\nu+n-1}{2}\right)\left(\frac{\nu+n-2}{2}\right)u(t)=0$$

$$\text{Equation hypergéométrique } {}_2F_1$$

$$t(1-t)u''(t)+(\gamma-(\alpha+\beta+1)t)u'(t)-\alpha\,\beta\,u(t)=0$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&\alpha=\frac{\nu+n-1}{2}=\frac{\nu+2\lambda-1}{2}\\&\beta=\frac{\nu+n-2}{2}=\frac{\nu+2\lambda}{2}\\&\gamma=\frac{2\nu+n}{2}=\nu+\lambda+1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left|\begin{aligned}&Solution\begin{cases}y(z)\propto\dfrac{1}{z^{\nu+n-2}}\,{}_2F_1\!\left(\dfrac{\nu+n-1}{2},\dfrac{\nu+n-2}{2};\nu+\dfrac{n}{2};\dfrac{1}{z^2}\right)\\ y(z)\propto\dfrac{1}{z^{\nu+2\lambda}}\,{}_2F_1\!\left(\dfrac{\nu+2\lambda+1}{2},\dfrac{\nu+2\lambda}{2};\nu+\lambda+1;\dfrac{1}{z^2}\right)\end{cases}\\&valable\ pour\ |z|>1\end{aligned}\right.$$

Dans ces conditions on peut proposer un nouveau développement en fonction hypergéométrique de la fonction de Gegenbauer de deuxième espèce :

$$C^{\lambda}_{(Q),\nu}(z)=e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{2^{2\lambda+\nu}\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\nu+\lambda+1)\,z^{\nu+2\lambda}}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}{}_2F_1\!\left(\frac{\nu+2}{2},\frac{\nu+1}{2};\nu+\lambda+1;\frac{1}{z^2}\right)\quad 1<z<\infty$$

$$\Rightarrow C^{\lambda}_{(Q),\nu}(z)=e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}\,\frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma(\nu+2\lambda)}{2^{2\lambda+\nu}\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\nu+\lambda+1)\,z^{\nu+2\lambda}}\,{}_2F_1\!\left(\frac{\nu+2\lambda+1}{2},\frac{\nu+2\lambda}{2};\nu+\lambda+1;\frac{1}{z^2}\right)\quad 1<z<\infty$$

En juxtaposant les graphes des deux fonctions pour diverses valeurs de paramètre, on constate que les fonctions semblent bien identiques (en neutralisant le facteur multiplicatif $e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}$ *.*

Wronskien sur l'intervalle [-1,1]

Les fonctions de Gegenbauer sont donc telles que définies comme suit :

$$C_\nu^\lambda(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)\quad \textit{fonctions de Gegenbauer de première espèce}$$

$$C_{(Q),\nu}^\lambda(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)\quad \textit{fonctions de Gegenbauer de deuxième espèce}$$

Dans ce cas on peut tenter de calculer le Wronskien. Tout d'abord on sait que le Wronskien est par définition proportionnelle à l'expression suivante :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{n-3}{2}}}\left(\dfrac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{dy_1(z)}{dz}\right)\right)+\nu(\nu+n-2)y_1(z)=0\\ \dfrac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{n-3}{2}}}\left(\dfrac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{dy_2(z)}{dz}\right)\right)+\nu(\nu+n-2)y_2(z)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}W\left(y_1(z),y_2(z)\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow W\left(y_1(z),y_2(z)\right)=\frac{C}{\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}$$

Calculons le explicitement à partir de la forme choisie pour les solutions de première et deuxième espèce :

$$W\left(f(z)y_1(z),f(z)y_2(z)\right)=\left(f(z)\right)^2W\left(y_1(z),y_2(z)\right)\Rightarrow$$

$$W\left(C_\nu^\lambda(z),C_{(Q),\nu}^\lambda(z)\right)=\left(\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\right)^2W\left(P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z),Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)\right)$$

$$W\left(P_\nu^\mu(z),Q_\nu^\mu(z)\right)=\frac{1}{1-z^2}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\Rightarrow W\left(P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z),Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)\right)=\frac{1}{1-z^2}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu)}$$

$$\Rightarrow W\left(C_\nu^\lambda(z),C_{(Q),\nu}^\lambda(z)\right)=\frac{2^{1-2\lambda}\pi\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)^2}\frac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}}$$

$$\Rightarrow W\left(C_\nu^\lambda(z),C_{(Q),\nu}^\lambda(z)\right)=\frac{2^{3-n}\pi\,\Gamma(\nu+n-2)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}\frac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}$$

<u>Wronskien pour z > 1</u>

Les fonctions de Gegenbauer sont définies pour z>1 comme suit :

$$C_\nu^\lambda(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)\quad \textit{fonctions de Gegenbauer de première espèce}$$

$$C_{(Q),\nu}^\lambda(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)\quad \textit{fonctions de Gegenbauer de deuxième espèce}$$

Dans ce cas on peut tenter de calculer le Wronskien. Tout d'abord on sait que le Wronskien est par définition proportionnelle à l'expression suivante :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{n-3}{2}}}\left(\dfrac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{dy_1(z)}{dz}\right)\right)+\nu(\nu+n-2)y_1(z)=0\\ \dfrac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{n-3}{2}}}\left(\dfrac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{dy_2(z)}{dz}\right)\right)+\nu(\nu+n-2)y_2(z)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}W\left(y_1(z),y_2(z)\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow W\left(y_1(z),y_2(z)\right)=\frac{C}{\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}$$

Calculons le explicitement à partir de la forme choisie pour les solutions de première et deuxième espèce :

$$W\left(f(z)y_1(z),f(z)y_2(z)\right)=\left(f(z)\right)^2W\left(y_1(z),y_2(z)\right)\Rightarrow$$

$$W\left(C_\nu^\lambda(z),C_{(Q),\nu}^\lambda(z)\right)=\left(\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\right)^2W\left(P^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z),Q^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)\right)$$

$$W\left(P_\nu^\mu(z),Q_\nu^\mu(z)\right)=-\frac{e^{i\mu\pi}}{z^2-1}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\Rightarrow W\left(P^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z),Q^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)\right)=-\frac{e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}}{z^2-1}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu)}$$

$$\Rightarrow W\left(C_\nu^\lambda(z),C_{(Q),\nu}^\lambda(z)\right)=-\frac{2^{1-2\lambda}\pi\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)^2}\frac{e^{i\left(\frac{1-2\lambda}{2}\right)\pi}}{\left(z^2-1\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}}$$

$$\Rightarrow W\left(C_\nu^\lambda(z),C_{(Q),\nu}^\lambda(z)\right)=-\frac{2^{3-n}\pi\,\Gamma(\nu+n-2)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}\frac{e^{i\left(\frac{3-n}{2}\right)\pi}}{\left(z^2-1\right)^{\frac{n-1}{2}}}$$

<u>Fonctions de Gegenbauer conique ou fonctions hyperconiques</u>

Pour l'instant je n'ai pas trouvé de nom dans la littérature pour ces fonctions qui sont construites de la même que sont construites les fonctions coniques de Mehler. Je m'explique revenons à l'équation différentielle des fonctions de Gegenbauer (ultra-sphériques)

$$\left(1-z^2\right)y''(z)-(2\lambda+1)\,z\,y'(z)+\nu(\nu+2\lambda)\,y(z)=0$$

Supposons que le degré ν est un nombre complexe de telle manière que ν(ν+2λ) reste réel :

$$\nu=\alpha+i\tau\Rightarrow\nu(\nu+2\lambda)=(\alpha+i\tau)(\alpha+2\lambda+i\tau)\Rightarrow\alpha=-\alpha-2\lambda\Rightarrow\alpha=-\lambda$$
$$\Leftrightarrow\nu(\nu+2\lambda)=(\lambda+i\tau)(-\lambda+i\tau)=-\lambda^2-\tau^2$$

L'équation différentielle devient alors :

$$\left(1-z^2\right)y''(z)-(2\lambda+1)\,z\,y'(z)-\left(\lambda^2+\tau^2\right)y(z)=0$$

Il s'agit donc de construire les fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce de degré -λ+iτ :

$$\begin{cases}C^{\lambda}_{-\lambda+i\tau}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\,\dfrac{\Gamma(\lambda+i\tau)}{\Gamma(1-\lambda+i\tau)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P^{\frac{1}{2}-\lambda}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)\\ C^{\lambda}_{(Q),-\lambda+i\tau}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\,\dfrac{\Gamma(\lambda+i\tau)}{\Gamma(1-\lambda+i\tau)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q^{\frac{1}{2}-\lambda}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)\end{cases}\qquad z\in[-1,+1]$$

$$\begin{cases}C^{\lambda}_{-\lambda+i\tau}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\,\dfrac{\Gamma(\lambda+i\tau)}{\Gamma(1-\lambda+i\tau)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P^{\frac{1}{2}-\lambda}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)\\ C^{\lambda}_{(Q),-\lambda+i\tau}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\,\dfrac{\Gamma(\lambda+i\tau)}{\Gamma(1-\lambda+i\tau)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q^{\frac{1}{2}-\lambda}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)\end{cases}\qquad z>1$$

Posons : $A(\lambda,\tau)=\dfrac{\Gamma(\lambda+i\tau)}{\Gamma(1-\lambda+i\tau)}$*, comme l'on a :*

$$\overline{A(\lambda,\tau)}=\frac{\Gamma(1-\lambda+i\tau)}{\Gamma(\lambda+i\tau)}\,\frac{\Gamma(\lambda+i\tau)}{\Gamma(1-\lambda+i\tau)}\,\frac{\Gamma(\lambda-i\tau)}{\Gamma(1-\lambda-i\tau)}=\frac{Sin(\pi(\lambda+i\tau))}{Sin(\pi(\lambda-i\tau))}\,\frac{\Gamma(\lambda+i\tau)}{\Gamma(1-\lambda+i\tau)}\Rightarrow\overline{A(\lambda,\tau)}=\frac{Sin(\pi(\lambda+i\tau))}{Sin(\pi(\lambda-i\tau))}A(\lambda,\tau)$$

Il vient : $C^{\lambda}_{-\lambda-i\tau}(z)=\dfrac{Sin(\pi(\lambda-i\tau))}{Sin(\pi(\lambda+i\tau))}C^{\lambda}_{-\lambda+i\tau}(z)$*. Ces fonctions ne sont donc pas à valeurs réelles, excepté pour la valeur λ=1/2, ainsi que toutes les valeurs demi-entières de λ, pour la fonction de première espèce uniquement :* $C^{\lambda}_{-\lambda-i\tau}(z)=C^{\lambda}_{-\lambda+i\tau}(z)\qquad\lambda=\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},\ldots$*.*

Lien des polynômes de Gegenbauer avec les polynômes de Jacobi

Tout d'abord d'après la formule précédente il est clair que lorsque ν est une entier, alors les termes de la série hypergéométrique s'annulent pour toute valeur au delà de ν. En conséquence la fonction de Gegenbauer est bien un polynôme pour ce cas là . Ces polynômes sont également liés au polynômes de Jacobi dont ils sont un sous-cas. Les polynômes de Jacobi sont solutions de l'équation différentielles de Jacobi :

$$\text{Equation différentielle de Jacobi}$$
$$\left(1-t^2\right)y''(t)+(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)t)y'(t)+\nu(\nu+\alpha+\beta+1)y(z)=0$$
$$\text{Si } \nu \text{ entier} \Rightarrow \text{Polynôme de Jacobi} \quad P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t) \text{ définis comme suit}(\text{formule de Rodrigues})$$
$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t)=\frac{(-1)^\nu}{2^\nu \nu!}(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left((1-t)^{\nu+\alpha}(1+t)^{\nu+\beta}\right)$$
$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(1)=\frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\nu!\Gamma(\alpha+1)}$$
$$\text{Posons} \quad \alpha=\beta=\frac{n-3}{2}=\frac{2\lambda-1}{2}\Rightarrow \alpha+\beta+1=n-2=2\lambda \quad \alpha+\beta+2=n-1=2\lambda+1$$
$$\Rightarrow \left(1-t^2\right)y''(t)-(n-1)t\,y'(t)+\nu(\nu+n-2)y(z)=0$$
$$\Rightarrow \left(1-t^2\right)y''(t)-(2\lambda+1)t\,y'(t)+\nu(\nu+2\lambda)y(z)=0$$

Avec cette définition, on voit facilement le lien des polynômes de Gegenbauer et ceux de Jacobi :

$$C_\nu^\lambda(z)\propto P_\nu^{\left(\frac{2\lambda-1}{2},\frac{2\lambda-1}{2}\right)}(t) \quad \lambda=\frac{n-2}{2}$$
$$C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z)\propto P_\nu^{\left(\frac{n-3}{2},\frac{n-3}{2}\right)}(t)$$
$$\text{Normalisation} \Rightarrow$$
$$C_\nu^\lambda(z)=\frac{(2\lambda)_\nu}{\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)_\nu}P_\nu^{\left(\frac{2\lambda-1}{2},\frac{2\lambda-1}{2}\right)}(t)=\frac{\Gamma(2\lambda+\nu)\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\lambda+1+2\nu}{2}\right)\Gamma(2\lambda)}P_\nu^{\left(\frac{2\lambda-1}{2},\frac{2\lambda-1}{2}\right)}(t)$$
$$C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z)=\frac{(n-2)_\nu}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_\nu}P_\nu^{\left(\frac{n-3}{2},\frac{n-3}{2}\right)}(t)=\frac{\Gamma(2\lambda+\nu)\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\lambda+1+2\nu}{2}\right)\Gamma(2\lambda)}P_\nu^{\left(\frac{2\lambda-1}{2},\frac{2\lambda-1}{2}\right)}(t)$$
$$(\lambda)_\nu \quad \text{symbole de Pochammer} \rightarrow (\lambda)_\nu=\frac{\Gamma(\lambda+\nu)}{\Gamma(\lambda)}$$

Les polynômes de Gegenbauer ont la parité, ainsi que les diverses valeurs suivantes :

$$C_n^\lambda(-z) = (-1)^n C_n^\lambda(z) \quad C_\nu^0(z) = P_\nu(z)$$

On use de la relation $\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \Gamma(\nu+n-2) = \frac{2^{\nu+n-3}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\nu+n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+n-1}{2}\right)$

$$\Gamma(n-2) = \frac{2^{n-3}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \quad \Gamma(n-1) = \frac{2^{n-2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\Gamma(2\lambda) = \frac{2^{2\lambda-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{2\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right) \quad \Gamma(2\lambda+1) = \frac{2^{2\lambda}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\lambda+2}{2}\right)$$

$$\Gamma(\nu+2\lambda) = \frac{2^{\nu+2\lambda-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\nu+2\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2\lambda+1}{2}\right) \quad \Gamma(2\lambda+2) = \frac{2^{2\lambda+1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{2\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\lambda+3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{2\lambda+3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\lambda+2)2^{-2\lambda-1}}{\Gamma(\lambda+1)}$$

$$\Gamma(2\lambda+\nu+1) = \frac{2^{2\lambda+\nu}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{2\lambda+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\lambda+\nu+2}{2}\right)$$

$$C_\nu^\lambda(0) = \frac{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu+2\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} = \frac{2^{1-2\lambda}\pi\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2\lambda+1}{2}\right)}$$

$$C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(0) = \frac{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu+n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} = \frac{2^{3-n}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+n-2)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+n-1}{2}\right)}$$

$$C_\nu^\lambda(1) = \frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)} \quad C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(1) = \frac{\Gamma(\nu+n-2)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)}$$

$$C_\nu^{\lambda}{}'(0) = \frac{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu+2\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{2-\nu}{2}\right)} \quad C_\nu^{\frac{n-2}{2}}{}'(0) = \frac{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu+n-1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{2-\nu}{2}\right)}$$

$$C_\nu^{\lambda}{}'(1) = \frac{2^{-2\lambda}\nu\sqrt{\pi}(\nu+2\lambda)\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{2\lambda+3}{2}\right)} = \frac{\Gamma(2\lambda+1+\nu)}{\Gamma(\nu)(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda)} \quad C_\nu^{\lambda}{}'(-1) = (-1)^\nu\frac{\Gamma(2\lambda+1+\nu)}{\Gamma(\nu)(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda)}$$

$$C_\nu^{\frac{n-2}{2}}{}'(1) = \frac{\nu\,\Gamma(n-2+\nu)(n-2+\nu)}{\Gamma(\nu+1)(n-1)\Gamma(n-2)} = \frac{\Gamma(n-1+\nu)}{\Gamma(\nu)(n-1)\Gamma(n-2)} \quad C_\nu^{\frac{n-2}{2}}{}'(-1) = (-1)^\nu\frac{\Gamma(n-1+\nu)}{\Gamma(\nu)(n-1)\Gamma(n-2)}$$

Orthogonalité des fonctions de Gegenbauer de première et de deuxième espèce

En écrivant l'équation différentielle de Gegenbauer sous la forme :

$$\frac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{n-3}{2}}}\frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{dy(z)}{dz}\right)+\nu(\nu+n-2)y(z)=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}}\frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\frac{dy(z)}{dz}\right)+\nu(\nu+n-2)y(z)=0$$

.

Et en se conformant à l'identification « classique » d'un problème de Sturm-Liouville, on voit que l'opérateur de Sturm-Liouville s'écrit :

$$L(y(z))=\frac{1}{w(z)}\left(-\frac{d}{dz}\left(p(z)\frac{dy(z)}{dz}\right)+s(z)\right)$$

Equation aux valeurs propres $\omega \rightarrow L(y(z))=\omega\, y(z)$

$$\frac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{n-3}{2}}}\left(-\frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{dy(z)}{dz}\right)\right)=\nu(\nu+n-2)y(z)$$

$$w(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{n-3}{2}} \quad p(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \quad s(z)=0 \quad \omega=\nu(\nu+n-2)$$

$$w(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \quad p(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \quad \omega=\nu(\nu+2\lambda)$$

Il vient donc directement l'orthogonalité des solutions d'un problème aux limites de l'équation différentielle du second degré sur un intervalle [a,b] (type Dirichlet ou Neumann). Comme parmi les solutions il y a les fonctions de Gegenbauer comme solution de première espèce, il vient :

$$\int_a^b dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_\nu^\lambda(z)C_{\nu'}^\lambda(z)=\left\|C_\nu^\lambda(z)\right\|^2\partial_{\nu,\nu'}$$

$$\int_a^b dz\left(1-z^2\right)^{\frac{n-3}{2}} C_\nu^\lambda(z)C_{\nu'}^\lambda(z)=\left\|C_\nu^{\frac{n-3}{2}}(z)\right\|^2\partial_{\nu,\nu'}$$

$$Norme\left\|C_\nu^\lambda(z)\right\|^2=\int_a^b dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(C_\nu^\lambda(z)\right)^2=\int_a^b dz\left(1-z^2\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(C_\nu^{\frac{n-3}{2}}(z)\right)^2$$

.

Lorsque l'intervalle [a,b] est tout l'espace des valeurs de Cos(ϑ), soit[-1,1], alors l'intégration de la norme se développe sur les polynômes de Gegenbauer, et la norme est connue explicitement :

$$Norme\left\|C_l^\lambda(z)\right\|^2=\int_{-1}^1 dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(C_l^\lambda(z)\right)^2=\frac{\pi 2^{1-2\lambda}\Gamma(l+2\lambda)}{l!(l+\lambda)(\Gamma(\lambda))^2}$$

$$\left\|C_l^{\frac{n-3}{2}}(z)\right\|^2=\int_{-1}^1 dz\left(1-z^2\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(C_l^{\frac{n-3}{2}}(z)\right)^2=\frac{\pi 2^{4-n}\Gamma(l+n-2)}{l!(2l+n-2)\left(\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\right)^2}$$

Pour les autres normes sur les fonctions de Gegenbauer solution du problème aux limites sur un intervalle restreint [a,b], on réalisera une formule générale de calcul à la manière de celle définit pour les problèmes aux limites sphériques (fonctions de Legendre),(voir plus loin).

<u>Formule de Rodrigues et fonctions génératrices des polynômes de Gegenbauer :</u>

A partir de l'expression du poids dans la relation d'orthogonalité des polynômes de Gegenbauer , il vient immédiatement la formule de Rodrigues qui permet la génération des polynômes de Gegenbauer :

$$C_l^{\lambda}(z)=(-1)^l\frac{\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)\Gamma(l+2\lambda)}{l!2^l\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\frac{2l+2\lambda+1}{2}\right)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\frac{d^l}{dz^l}\left(\left(1-z^2\right)^{l+\frac{2\lambda-1}{2}}\right)$$

$$C_l^{\frac{n-2}{2}}(z)=(-1)^l\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(l+n-2)}{l!2^l\Gamma(n-2)\Gamma\left(\frac{2l+n-1}{2}\right)}\left(1-z^2\right)^{\frac{3-n}{2}}\frac{d^l}{dz^l}\left(\left(1-z^2\right)^{l+\frac{n-3}{2}}\right)$$

La fonction génératrice des polynômes de Gegenbauer est la suivante :

$$(1)\qquad \frac{1}{\left(1+t^2-2tz\right)^{\lambda}}=\sum_{l=0}^{\infty}t^lC_l^{\lambda}(z)\Leftrightarrow\frac{1}{\left(1+t^2-2tz\right)^{\frac{n-2}{2}}}=\sum_{l=0}^{\infty}t^lC_l^{\frac{n-2}{2}}(z)\quad |t|<1$$

$$(1)\qquad \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}-\frac{2z}{t}\right)^{\lambda}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{t^{l+2\lambda}}C_l^{\lambda}(z)\Leftrightarrow\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}-\frac{2z}{t}\right)^{\frac{n-2}{2}}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{t^{l+n-2}}C_l^{\frac{n-2}{2}}(z)\quad |t|>1$$

$$(2)\qquad \frac{1-t^2}{\left(1+t^2-2tz\right)^{\lambda+1}}=\sum_{l=0}^{\infty}t^l\frac{(\lambda+l)}{\lambda}C_l^{\lambda}(z)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1-t^2}{\left(1+t^2-2tz\right)^{\frac{n}{2}}}=\sum_{l=0}^{\infty}t^l\frac{(n+2l-2)}{(n-2)}C_l^{\frac{n-2}{2}}(z)$$

On peut voir qu'une autre fonction génératrice (2) peut-être déduite d'un article de 2012 « C.R.FRYE.C.EFTHIMIOU-SPHERICAL HARMONICS IN p DIMENSIONS »

Par ailleurs dans l'ouvrage de L.Robin « Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroïdales » Tome 3, page 193 deux autres fonctions génératrices sont données :

$$(3)\qquad \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\frac{1-t^2}{\sqrt{1-2zt+t^2}\left(2\left(1-zt+\sqrt{1-2zt+t^2}\right)\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\lambda+l+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda+l)}t^lC_l^{\lambda}(z)\quad\forall\lambda,z\quad et\quad |t|<\left|z-\sqrt{z^2-1}\right|$$

$$(4)\qquad \frac{\sqrt{\pi}e^{iCos(\vartheta)}J_{\lambda-\frac{1}{2}}(tSin(\vartheta))}{\Gamma(\lambda)(2tSin(\vartheta))^{\lambda-\frac{1}{2}}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l}{\Gamma(2\lambda+l)}C_l^{\lambda}(z)$$

Formules de récurrence des fonctions de première espèce et des polynômes de Gegenbauer :

Les polynômes de Gegenbauer et plus généralement les fonctions de Gegenbauer sont liées entre plus proches voisins par les formules suivantes :

$$(\nu+1)C_{\nu+1}^{\lambda}(z)=2(\lambda+\nu)zC_{\nu}^{\lambda}(z)-(2\lambda+\nu-1)C_{\nu-1}^{\lambda}(z)$$

$$(\nu+1)C_{\nu+1}^{\frac{n-2}{2}}(z)=(2\nu+n-2)zC_{\nu}^{\frac{n-2}{2}}(z)-(\nu+n-3)C_{\nu-1}^{\frac{n-2}{2}}(z)$$

On peut dériver ces formules à l'aide de la représentation par les fonctions de Legendre associées :

$$C_{\nu}^{\lambda}(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) \qquad (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^{\mu}(z)=(2\nu+1)zP_{\nu}^{\mu}(z)-(\mu+\nu)P_{\nu-1}^{\mu}(z)$$

$$\Rightarrow (\nu+1)P_{\lambda+\nu+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)=2(\lambda+\nu)zP_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)-\nu\,P_{\lambda+\nu-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)$$

$$\Rightarrow (2\lambda+\nu)\frac{\Gamma(\nu+2)}{(\nu+2\lambda)\Gamma(\nu+2\lambda)}C_{\nu+1}^{\lambda}(z)=2(\lambda+\nu)z\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+2\lambda)}C_{\nu}^{\lambda}(z)-\frac{(\nu-1+2\lambda)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+2\lambda)}C_{\nu-1}^{\lambda}(z)$$

$$\Rightarrow (\nu+1)C_{\nu+1}^{\lambda}(z)=2(\lambda+\nu)zC_{\nu}^{\lambda}(z)-(\nu-1+2\lambda)C_{\nu-1}^{\lambda}(z) \quad c.q.f.d.$$

Il y a un grand intérêt à remarquer que les formules de récurrence des polynômes de Gegenbauer s'étendent également à toutes les valeurs du paramètre ν, et comme nous le verrons par la suite aux fonctions de deuxième espèce.

<u>Formules de dérivation des fonctions de Gegenbauer de première espèce</u>

La contribution de l'article de 2012 « L.M.B.C.CAMPOS.F.S.R.P.CUNHA-ON HYPERSHERICAL LEGENDRE POLYNOMIALS AND HIGHER DIMENSIONAL MULTIPOLE EXPANSIONS, Journal of Inequalities and Special Functions Volume 3 Issue 3 (2012), Pages 1-28 » est de donner des nouvelles formules de dérivation :

$$(1)\quad \nu\, C_\nu^\lambda(z) = zC_\nu^\lambda{}'(z) - C_{\nu-1}^\lambda{}'(z) \Leftrightarrow \nu\, C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z) = zC_\nu^{\frac{n-2}{2}}{}'(z) - C_{\nu-1}^{\frac{n-2}{2}}{}'(z)$$

$$(2)\quad C_{\nu+1}^\lambda{}'(z) - C_{\nu-1}^\lambda{}'(z) = (2\lambda+2\nu)C_\nu^\lambda(z) \Leftrightarrow C_{\nu+1}^{\frac{n-2}{2}}{}'(z) - C_{\nu-1}^{\frac{n-2}{2}}{}'(z) = (n-2+2\nu)C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z)$$

$$(3)\quad C_{\nu+1}^\lambda{}'(z) - zC_\nu^\lambda{}'(z) = (2\lambda+\nu)C_\nu^\lambda(z) \Leftrightarrow C_{\nu+1}^{\frac{n-2}{2}}{}'(z) - zC_\nu^{\frac{n-2}{2}}{}'(z) = (n-2+\nu)C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z)$$

$$(4)\quad (z^2-1)C_\nu^\lambda{}'(z) = \nu\, z\, C_\nu^\lambda(z) - (2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(z) \Leftrightarrow (z^2-1)C_\nu^{\frac{n-2}{2}}{}'(z) = \nu\, z\, C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z) - (n-3+\nu)C_{\nu-1}^{\frac{n-2}{2}}(z)$$

$$(5)\quad (z^2-1)C_\nu^\lambda{}'(z) = (\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z) - (2\lambda+\nu)zC_\nu^\lambda(z) \Leftrightarrow (z^2-1)C_\nu^{\frac{n-2}{2}}{}'(z) = (\nu+1)C_{\nu+1}^{\frac{n-2}{2}}(z) - (n-2+\nu)zC_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z)$$

A partir de la représentation des fonctions de Gegenbauer par les fonctions de Legendre associées de première espèce on peut également les établir comme suit :

$$C_\nu^\lambda(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) \quad C_{\nu-1}^\lambda(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda-1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-1-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)$$

$$\Rightarrow C_\nu^\lambda{}'(z) = z\left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)\frac{C_\nu^\lambda(z)}{(1-z^2)} + \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}{}'(z)$$

$$\Rightarrow \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}(1-z^2)P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}{}'(z) = (1-z^2)C_\nu^\lambda{}'(z) - z\left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)C_\nu^\lambda(z)$$

$$\Leftrightarrow P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) = \frac{2^{-\frac{1-2\lambda}{2}}\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}}(1-z^2)^{-\frac{1-2\lambda}{4}}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+2\lambda)}C_\nu^\lambda(z) \quad P_{\lambda+\nu-1-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) = \frac{2^{-\frac{1-2\lambda}{2}}\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}}(1-z^2)^{-\frac{1-2\lambda}{4}}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-1+2\lambda)}C_{\nu-1}^\lambda(z)$$

$$\text{Partons de } (1-z^2)P_\nu^\mu{}'(z) = -\nu\, zP_\nu^\mu(z) + (\mu+\nu)P_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$\Rightarrow (1-z^2)P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}{}'(z) = -\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}\right)zP_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) + \nu P_{\lambda+\nu-1-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)$$

$$\Rightarrow \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}(1-z^2)P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}{}'(z)$$

$$= -\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}\right)z\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) + \nu\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-1-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)$$

$$= -\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}\right)zC_\nu^\lambda(z) + (\nu+2\lambda-1)C_{\nu-1}^\lambda(z)$$

$$\Rightarrow (1-z^2)C_\nu^\lambda{}'(z) = z\left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)C_\nu^\lambda(z) - \left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}\right)zC_\nu^\lambda(z) + (\nu+2\lambda-1)C_{\nu-1}^\lambda(z)$$

$$\Rightarrow (z^2-1)C_\nu^\lambda{}'(z) = \nu\, zC_\nu^\lambda(z) - (\nu+2\lambda-1)C_{\nu-1}^\lambda(z) \rightarrow (4)\ \textit{est démontrée}$$

Partons d'une autre égalité de dérivation pour démontrer la formule (5) :

$$Partons\ de\ \left(1-z^2\right)P_\nu^{\mu}{}'(z)=(\nu+1)zP_\nu^\mu(z)+(\mu-\nu-1)P_{\nu+1}^\mu(z)$$

$$\Rightarrow \left(1-z^2\right)P^{\frac12-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac12}{}'(z)=\left(\lambda+\nu+\frac12\right)zP^{\frac12-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac12}(z)-(2\lambda+\nu)P^{\frac12-\lambda}_{\lambda+\nu+1-\frac12}(z)$$

$$\Rightarrow \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\left(1-z^2\right)P^{\frac12-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac12}{}'(z)$$

$$=\left(\lambda+\nu+\frac12\right)z\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P^{\frac12-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac12}(z)-(\nu+1)\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda+1)}{\Gamma(\nu+2)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P^{\frac12-\lambda}_{\lambda+\nu+1-\frac12}(z)$$

$$=\left(\lambda+\nu+\frac12\right)zC_\nu^\lambda(z)+\frac{(1-2\lambda-\nu)(\nu+1)}{(\nu+2\lambda+1)}C^\lambda_{\nu+1}(z)$$

$$\Rightarrow \left(1-z^2\right)C_\nu^\lambda{}'(z)=z\left(\lambda-\frac12\right)C_\nu^\lambda(z)+\left(\lambda+\nu+\frac12\right)zC_\nu^\lambda(z)-(\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z)$$

$$\Rightarrow \left(1-z^2\right)C_\nu^\lambda{}'(z)=z(2\lambda+\nu)C_\nu^\lambda(z)-(\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z)$$

$$\Rightarrow \left(z^2-1\right)C_\nu^\lambda{}'(z)=-z(2\lambda+\nu)C_\nu^\lambda(z)+(\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z)\rightarrow (5)\ est\ démontrée$$

Partons maintenant des égalités (4) et (5) démontrées précédemment pour retrouver (1), (2) et (3)

$$(4)\quad \nu\, z\, C_\nu^\lambda(z)-(2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(z)=\left(z^2-1\right)C_\nu^\lambda{}'(z)$$

$$(5)\quad -(2\lambda+\nu)zC_\nu^\lambda(z)+(\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z)=\left(z^2-1\right)C_\nu^\lambda{}'(z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\nu C_\nu^\lambda(z)-(2\lambda+\nu-1)zC_{\nu-1}^\lambda(z)=\left(z^2-1\right)C_{\nu-1}^\lambda{}'(z)\\ \nu\, z\, C_\nu^\lambda(z)-(2\lambda+\nu-1)C_{\nu-1}^\lambda(z)=\left(z^2-1\right)C_\nu^\lambda{}'(z)\Leftrightarrow \nu\, z^2C_\nu^\lambda(z)-(2\lambda+\nu-1)zC_{\nu-1}^\lambda(z)=z\left(z^2-1\right)C_\nu^\lambda{}'(z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\nu C_\nu^\lambda(z)\left(z^2-1\right)=\left(z^2-1\right)C_{\nu-1}^\lambda{}'(z)-z\left(z^2-1\right)C_\nu^\lambda{}'(z)\Leftrightarrow \nu C_\nu^\lambda(z)=-C_{\nu-1}^\lambda{}'(z)+zC_\nu^\lambda{}'(z)$$

$$(1)\quad \nu\, C_\nu^\lambda(z)=zC_\nu^\lambda{}'(z)-C_{\nu-1}^\lambda{}'(z)\quad est\ démontrée$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(\nu+1)zC_{\nu+1}^\lambda(z)-(2\lambda+\nu)C_\nu^\lambda(z)=\left(z^2-1\right)C_{\nu+1}^\lambda{}'(z)\\ (\nu+1)zC_{\nu+1}^\lambda(z)-(2\lambda+\nu)z^2C_\nu^\lambda(z)=z\left(z^2-1\right)C_\nu^\lambda{}'(z)\end{cases}\Rightarrow (2\lambda+\nu)\left(z^2-1\right)C_\nu^\lambda(z)=\left(z^2-1\right)\left(C_{\nu+1}^\lambda{}'(z)-zC_\nu^\lambda{}'(z)\right)$$

$$\Rightarrow (3)\quad C_{\nu+1}^\lambda{}'(z)-zC_\nu^\lambda{}'(z)=(2\lambda+\nu)C_\nu^\lambda(z)\quad est\ démontrée$$

$$\begin{cases}\nu\, C_\nu^\lambda(z)=zC_\nu^\lambda{}'(z)-C_{\nu-1}^\lambda{}'(z)\\ (2\lambda+\nu)C_\nu^\lambda(z)=C_{\nu+1}^\lambda{}'(z)-zC_\nu^\lambda{}'(z)\end{cases}\Rightarrow (2)\quad C_{\nu+1}^\lambda{}'(z)-C_{\nu-1}^\lambda{}'(z)=2(\lambda+\nu)C_\nu^\lambda(z)\quad est\ démontrée$$

Nous avons également les formules plus connues de dérivation (voir l'équivalent pour les intégrales indéfinies) :

$$C_\nu^\lambda{}'(z)=2\lambda C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z)\Leftrightarrow C_\nu^{\frac{n-2}{2}}{}'(z)=(n-2)C_{\nu-1}^{\frac n2}(z)$$

$$\frac{d^m}{dz^m}C_\nu^\lambda(z)=2^m(\lambda)_mC_{\nu-m}^{\lambda+m}(z)=2^m\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}C_{\nu-m}^{\lambda+m}(z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^m}{dz^m}C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z)=2^m\left(\frac{n-2}{2}\right)_mC_{\nu-m}^{\frac n2+m-1}(z)=2^m\frac{\Gamma\left(\frac n2+m-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}C_{\nu-m}^{\frac n2+m-1}(z)$$

Pour la première formule partons de l'égalité (5) et utilisons les relations de récurrences sur les degrés et les ordres pour les fonctions associées de Legendre, pour établir des formules avec les ordres descendants :

Récurrence sur les ordres et les degrés $(A)\quad (1-z^2)^{\frac{1}{2}} P_\nu^{\mu+1}(z) = (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z) - (\nu+\mu+1)zP_\nu^\mu(z)$

Or $\quad (\mu+\nu)P_{\nu-1}^\mu(z) = (2\nu+1)zP_\nu^\mu(z) - (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z) \Leftrightarrow (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z) = (2\nu+1)zP_\nu^\mu(z) - (\mu+\nu)P_{\nu-1}^\mu(z)$

$$\Rightarrow (1-z^2)^{\frac{1}{2}} P_\nu^{\mu+1}(z) = (2\nu+1)zP_\nu^\mu(z) - (\mu+\nu)P_{\nu-1}^\mu(z) - (\nu+\mu+1)zP_\nu^\mu(z)$$

$$\Rightarrow (B)\quad (1-z^2)^{\frac{1}{2}} P_\nu^{\mu+1}(z) = (\nu-\mu)zP_\nu^\mu(z) - (\mu+\nu)P_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$(C)\quad (1-z^2)^{\frac{1}{2}} P_{\nu+1}^\mu(z) = \frac{P_\nu^{\mu+1}(z) - zP_{\nu+1}^{\mu+1}(z)}{(\nu-\mu+1)} \Leftrightarrow (1-z^2)^{\frac{1}{2}} P_\nu^{\mu-1}(z) = \frac{P_{\nu-1}^\mu(z) - zP_\nu^\mu(z)}{(\nu-\mu+1)}$$

Or $\quad (\mu+\nu)P_{\nu-1}^\mu(z) = (2\nu+1)zP_\nu^\mu(z) - (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z)$

$$\Rightarrow (D)\quad (1-z^2)^{\frac{1}{2}} P_\nu^{\mu-1}(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2}} P_\nu^{\mu-1}(z) = \frac{P_{\nu-1}^\mu(z) - P_{\nu+1}^\mu(z)}{2\nu+1} \Rightarrow (E)\quad (1-z^2)^{\frac{1}{2}} P_\nu^{\mu-1}(z) = \frac{zP_\nu^\mu(z) - P_{\nu+1}^\mu(z)}{(\mu+\nu)}$$

$$C_\nu^\lambda(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) \quad C_{\nu-1}^\lambda(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda-1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}-1}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)$$

$$C_{\nu+1}^\lambda(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda+1)}{\Gamma(\nu+2)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}+1}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) \quad C_{\nu+1}^{\lambda-1}(z) = \frac{2^{\frac{1}{2}-\lambda+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda-1)}{\Gamma(\nu+2)\Gamma(\lambda-1)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}+\frac{1}{2}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda+1}(z)$$

$$C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z) = \frac{2^{\frac{1}{2}-\lambda-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda+1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\lambda+1)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{1}{2}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-1}(z)$$

Partons de $(A) \Rightarrow (1-z^2)^{\frac{1}{2}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda+1}(z) = (2\lambda+\nu)P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}+1}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) - (\nu+1)zP_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)$

$$\Rightarrow \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{2\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}+\frac{1}{2}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda+1}(z) = (\nu+1)\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda+1)}{\Gamma(\nu+2)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}+1}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) - (\nu+1)zC_\nu^\lambda(z)$$

$$\Rightarrow \frac{(\nu+1)(\nu+2\lambda-1)}{2(\lambda-1)}C_{\nu+1}^{\lambda-1}(z) = (\nu+1)\left(C_{\nu+1}^\lambda(z) - zC_\nu^\lambda(z)\right) \Rightarrow (F)\quad C_{\nu+1}^{\lambda-1}(z) = \frac{2(\lambda-1)}{(\nu+2\lambda-1)}\left(C_{\nu+1}^\lambda(z) - zC_\nu^\lambda(z)\right)$$

Comme $\quad \dfrac{\left(C_{\nu+1}^\lambda(x) - xC_\nu^\lambda(x)\right)}{(\nu+2\lambda-1)} = \dfrac{\left(zC_\nu^\lambda(z) - C_{\nu-1}^\lambda(z)\right)}{(\nu+1)} \Rightarrow (F')\quad C_{\nu+1}^{\lambda-1}(z) = \dfrac{2(\lambda-1)}{(\nu+1)}\left(z\,C_\nu^\lambda(z) - C_{\nu-1}^\lambda(z)\right)$

Deux dernières relations peuvent être établies avec les ordres ascendants :

$$\text{Partons de }(E) \Rightarrow \left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-1}(z) = \frac{zP_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) - P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}+1}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)}{\nu}$$

$$\frac{2\left(1-z^2\right)\lambda}{(\nu+2\lambda)\nu} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda+1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\lambda+1)} \left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{1}{2}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-1}(z) =$$

$$\frac{zC_\nu^\lambda(z) - \dfrac{(\nu+1)2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda+1)}{(\nu+2\lambda)\Gamma(\nu+2)\Gamma(\lambda)} \left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}+1}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)}{\nu}$$

$$\Rightarrow \frac{2\left(1-z^2\right)\lambda}{\nu} C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z) = \frac{z(\nu+2\lambda)C_\nu^\lambda(z) - (\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z)}{\nu} \Rightarrow (G) \quad C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z) = \frac{z(\nu+2\lambda)C_\nu^\lambda(z) - (\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z)}{2\left(1-z^2\right)\lambda}$$

$$\Rightarrow (G') \quad C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z) = \frac{(2\lambda+\nu-1)C_{\nu-1}^\lambda(z) - z\nu\, C_\nu^\lambda(z)}{2\left(1-z^2\right)\lambda}$$

Partons maintenant de la dernière des formules de dérivation :

$$\left(1-z^2\right)C_\nu^\lambda{}'(z) = z(2\lambda+\nu)C_\nu^\lambda(z) - (\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z)$$

$$(G) \quad C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z) = \frac{z(\nu+2\lambda)C_\nu^\lambda(z) - (\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z)}{2\left(1-z^2\right)\lambda} \Leftrightarrow z(\nu+2\lambda)C_\nu^\lambda(z) - (\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z) = 2\left(1-z^2\right)\lambda C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z)$$

$$\Rightarrow \left(1-z^2\right)C_\nu^\lambda{}'(z) = 2\left(1-z^2\right)\lambda C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z)$$

$$\Rightarrow (H) \quad C_\nu^\lambda{}'(z) = 2\lambda C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z)$$

Cette dernière relation entraîne immédiatement une valeur d'intégrale indéfinie comme nous l'avons évoque précédemment :

$$C_\nu^\lambda{}'(z) = 2\lambda C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z) \Leftrightarrow C_{\nu+1}^{\lambda-1}{}'(z) = 2(\lambda-1)C_\nu^\lambda(z) \Rightarrow \int dz\, C_\nu^\lambda(z) = \frac{C_{\nu+1}^{\lambda-1}(z)}{2(\lambda-1)}$$

Il est important de préciser ici que toutes formules, y compris celle de récurrence sont valables pour toute valeur du paramètre v qu'il soit entier ou réel. En effet comme ces formules ont été établies ou vérifiées à l'aide de la construction par les fonctions de Legendre associées de première espèce. Et de même si l'on conserve la normalisation pour la seconde solution alors toutes les formules restent également valables pour les fonctions de Gegenbauer de deuxième espèce puisque les fonctions de Legendre associées ont exactement les mêmes formules de récurrence et de dérivation dans leur champ respectif.

<u>*Lien avec d'autres polynômes dans la littérature scientifique :*</u>

Dans deux articles datés de 2012, « C.R.FRYE.C.EFTHIMIOU-SPHERICAL HARMONICS IN p DIMENSIONS » et « L.M.B.C.CAMPOS.F.S.R.P.CUNHA-ON HYPERSHERICAL LEGENDRE POLYNOMIALS AND HIGHER DIMENSIONAL MULTIPOLE EXPANSIONS , Journal of Inequalities and Special Functions Volume 3 Issue 3 (2012), Pages 1-28 », les auteurs introduisent des polynômes orthogonaux hypersphériques qui ne sont qu'une version autrement normalisée, à une constante près, des polynômes de Gegenbauer. Nous noterons ces polynômes ainsi :

$$C_\nu^{(1),n}(z) \leftarrow Frye \qquad C_\nu^{(2),\alpha}(z) \leftarrow Campos \; .$$

Les formules de passages utilisées sont les suivantes :

$$\lambda = \frac{n-2}{2} \quad C_\nu^{(1),n}(z) = \frac{\nu!}{(n-2)_\nu} C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z) = \frac{\nu!\Gamma(n-2)}{\Gamma(n-2+\nu)} C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)}{\Gamma(n-2+\nu)} C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow C_\nu^{(1),n}(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)}{\Gamma(n-2+\nu)} C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z) \quad C_\nu^{(1),n}(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(2\lambda+\nu)} C_\nu^{\lambda}(z)$$

$$\Leftrightarrow C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z) = C_\nu^{(1),n}(z) \frac{\Gamma(n-2+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)} \quad C_\nu^{\lambda}(z) = C_\nu^{(1),n}(z) \frac{\Gamma(2\lambda+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)}$$

$$C_\nu^{(1),n}(z) = {}_2F_1\left(-\nu, \nu+n-2; \frac{n-1}{2}; \frac{1-z}{2}\right) \quad C_\nu^{(1),n}(z) = \frac{\nu!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_\nu} P_\nu^{\left(\frac{n-3}{2}, \frac{n-3}{2}\right)}(z) \quad \textit{polynôme de Jacobi}$$

$$\textit{Polynôme de Campos} \Leftrightarrow \textit{Polynôme de Gegenbauer}$$

$$\alpha = \frac{n-3}{2} \quad C_\nu^{(2),\alpha}(z) = \frac{\nu!}{(n-2)_\nu} C_\nu^{(1),n}(z) = \frac{\nu!}{(n-2)_\nu} C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow C_\nu^{(2),\alpha}(z) = C_\nu^{(2),\frac{n-3}{2}}(z) = C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z)$$

Les polynômes de la seconde publication ne sont donc ni plus ni moins que les polynômes de Gegenbauer, mais avec des paramètres α et λ présentés différemment.

Avec quelques propriétés :

$$Norme \rightarrow \left\| C_l^{(1),n}(z) \right\|^2 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(l+1)}{(2l+n-2)\Gamma(l+n-2)} = \frac{2^{n-2}\Gamma(l+1)\left(\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^2}{(2l+n-2)\Gamma(l+n-2)}$$

$$Formule\ de\ Rodrigues \rightarrow C_l^{(1),n}(z) = \frac{(-1)^l\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2^l\Gamma\left(\frac{2l+n-1}{2}\right)}\left(1-z^2\right)^{\frac{3-n}{2}} \frac{d^l}{dz^l}\left(\left(1-z^2\right)^{l+\frac{n-3}{2}}\right)$$

Fonctions génératrices

$$(1) \qquad \frac{1-t^2}{\left(1+t^2-2tz\right)^{\frac{n}{2}}} = \sum_{l=1}^{\infty} t^l \frac{(n+2l-2)(n+l-3)!}{l(l-1)!(n-2)!} C_l^{(1),n}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} t^l \frac{(n+2l-2)\Gamma(n+l-2)}{\Gamma(l+1)\Gamma(n-1)} C_l^{(1),n}(z)$$

$$(2) \qquad \frac{1}{\left(1+t^2-2tz\right)^{\frac{n-2}{2}}} = \sum_{l=1}^{\infty} t^l C_l^{\frac{n-2}{2}}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} t^l \frac{\Gamma(n-2+l)}{\Gamma(l+1)\Gamma(n-2)} C_l^{(1),n}(z)$$

Formule de récurrence

$$Gegenbauer \rightarrow (\nu+1)C_{\nu+1}^{\frac{n-2}{2}}(z) = (2\nu+n-2)zC_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z) - (\nu+n-3)C_{\nu-1}^{\frac{n-2}{2}}(z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\nu+n-2)\Gamma(n-2+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)} C_\nu^{(1),n}(z) = (2\nu+n-2)zC_\nu^{(1),n}(z)\frac{\Gamma(n-2+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)} - \nu C_{\nu-1}^{(1),n}(z)\frac{\Gamma(n-2+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)}$$

$$\Leftrightarrow (\nu+n-2)C_{\nu+1}^{(1),n}(z) = (2\nu+n-2)zC_\nu^{(1),n}(z) - \nu C_{\nu-1}^{(1),n}(z)$$

.

Voici des valeurs particulières de ces polynômes :

$$C_\nu^{(2),\alpha}(1) = \frac{(2\alpha+1)_\nu}{\nu!} = \frac{\Gamma(2\alpha+\nu+1)}{\nu!\Gamma(2\alpha+1)} = \frac{\Gamma(n-2+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)} \quad C_\nu^{(2),\alpha}(-1) = (-1)^\nu C_\nu^{(2),\alpha}(1) = (-1)^\nu \frac{\Gamma(n-2+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)}$$

$$C_\nu^{(1),n}(1) = \frac{\Gamma(n-2+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)} \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)}{\Gamma(n-2+\nu)} = 1 \quad C_\nu^{(1),\alpha}(-1) = (-1)^\nu$$

$$C_\nu^{(1),n}(0) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+\nu-1}{2}\right)} = \frac{2^\nu\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu+n-2}{2}\right)\Gamma(n-2)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma(n-2+\nu)} \Rightarrow si\ \nu = 2p+1 \rightarrow C_{2p+1}^{(1),n}(0)$$

$$C_\nu^{(1),n}{}'(0) = \frac{\nu\sqrt{\pi}(n-2+\nu)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{2-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}\right)} \quad C_\nu^{(1),n}{}'(1) = \frac{\nu(n-2+\nu)}{(n-1)} \quad C_\nu^{(1),n}{}'(-1) = (-1)^\nu \frac{\nu(n-2+\nu)}{(n-1)}$$

Les formules de dérivation avec les polynômes de Frye ne sont qu'une transcription des formules de dérivation des polynômes de Gegenbauer établies par Campos :

$$\text{Comme} \quad C_{\nu}^{\frac{n-2}{2}}(z) = C_{\nu}^{(1),n}(z)\frac{\Gamma(n-2+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)}$$

$$\Rightarrow C_{\nu+1}^{\frac{n-2}{2}}(z) = C_{\nu+1}^{(1),n}(z)\frac{\Gamma(n-1+\nu)}{\Gamma(\nu+2)\Gamma(n-2)} \quad C_{\nu-1}^{\frac{n-2}{2}}(z) = C_{\nu-1}^{(1),n}(z)\frac{\Gamma(n-3+\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(n-2)}$$

$$(1) \quad \nu\, C_{\nu}^{(1),n}(z) = zC_{\nu}^{(1),n}{}'(z) - \frac{\nu}{(n-2+\nu)}C_{\nu-1}^{(1),n}{}'(z)$$

$$(2) \quad C_{\nu+1}^{(1),n}{}'(z)\frac{(n-2+\nu)}{(\nu+1)} - \frac{\nu}{(n-3+2\nu)}C_{\nu-1}^{(1),n}{}'(z) = (n-2+2\nu)C_{\nu}^{(1),n}(z)$$

$$(3) \quad C_{\nu+1}^{(1),n}{}'(z)\frac{(n-2+\nu)}{(\nu+1)} - zC_{\nu}^{(1),n}{}'(z) = (n-2+\nu)C_{\nu}^{(1),n}(z)$$

$$(4) \quad (z^2-1)C_{\nu}^{(1),n}{}'(z) = \nu\left(z\,C_{\nu}^{(1),n}(z) - C_{\nu-1}^{(1),n}(z)\right)$$

$$(5) \quad (z^2-1)C_{\nu}^{(1),n}{}'(z) = (n-2+\nu)\left(C_{\nu+1}^{(1),n}(z) - zC_{\nu}^{(1),n}(z)\right)$$

On constate que les formules (4) et (5) sont celles qui se rapprochent le plus de la formule de dérivation pour les fonctions de Legendre de première espèce.

Calcul de quelques intégrales indéfinies des fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce

Pour calculer quelques intégrales indéfinies, nous allons utiliser une méthode très récente basée sur un formalisme de calcul variationnel et de Lagrangien introduite dans toute une série de publication remarquable dont voici la liste :

- John T. Conway-A Lagrangian Method for Deriving New Indefinite Integrals of Special Functions
Apr 2015 · Integral Transforms and Special Functions
- John T. Conway-Indefinite integrals of some special functions from a new method
Nov 2015 · Integral Transforms and Special Functions
- John T. Conway-Indefinite integrals of Lommel functions from an inhomogeneous Euler–Lagrange method
Nov 2015 · Integral Transforms and Special Functions
- John T. Conway-Indefinite integrals involving the incomplete elliptic integrals of the first and second kinds
Jan 2016 · Integral Transforms and Special Functions
- John T. Conway-Indefinite integrals involving the incomplete elliptic integral of the third kind
Aug 2016 · Integral Transforms and Special Functions
- John T. Conway-Indefinite integrals of products of special functions
Nov 2016 · Integral Transforms and Special Functions
- John T. Conway-Indefinite integrals of incomplete elliptic integrals from Jacobi elliptic functions
Mar 2017 · Integral Transforms and Special Functions
- John T. Conway-Indefinite integrals involving complete elliptic integrals of the third kind
Apr 2017 · Integral Transforms and Special Functions
- John T. Conway-Indefinite integrals involving the Jacobi Zeta and Heuman Lambda functions
May 2017 · Integral Transforms and Special Functions
- John T. Conway-Indefinite integrals of quotients of special functions
Jan 2018 · Integral Transforms and Special Functions
- John T. Conway Indefinite integrals of quotients of Gauss hypergeometric functions
Mar 2018 · Integral Transforms and Special Functions

Voici le résultat fondamental de la première publication résumé en quelques mots : supposons y(x) solution de l'équation différentielle du second degré suivante : $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$.

Et soit la fonction f(x) définie par la primitive : $f(x)=e^{\int dx\, p(x)}$

Alors pour toute fonction h(x) arbitraire au moins dérivable, le résultat suivant de l'intégrale indéfinie est établi :

$$\int dx\, f(x)\left(h''(x)+p(x)h'(x)+q(x)h(x)\right)y(x)=f(x)\left(h'(x)y(x)-y'(x)h(x)\right)$$

Le caractère arbitraire de la fonction h(x) implique la possibilité d'établir une infinité d'intégrales indéfinies. Parmi celles-ci, l'article expose deux méthodes pratique pour le choix de la fonction h(x). Par ailleurs si la primitive f(x) est facile à calculer, il y a de forte chance d'obtenir des résultats intéressant. Pour choisir h(x) deux méthode pratiques sont proposés. Pour intégrer la fonction elle-même, on peut choisir h(x) solution de l'équation inhomogène :

$$h(x)\ solution\ de\ h''(x)+p(x)h'(x)+q(x)h(x)=\frac{1}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \int dx\, f(x)\frac{1}{f(x)}y(x)=\int dx\, y(x)=f(x)\left(h'(x)y(x)-y'(x)h(x)\right).$$

On peut encore plus simplement prendre une fonction constante : h(x)=1, il vient alors :

$$\int dx\, f(x)q(x)y(x)=-f(x)y'(x)).$$

On peut également prendre les fonctions suivantes :

$$h(x)\ solution\ de\ h''(x)+p(x)h'(x)=0$$

$$\Rightarrow \int dx\, f(x)q(x)h(x)y(x)=f(x)\left(h'(x)y(x)-y'(x)h(x)\right)$$

$$h(x)\ solution\ de\ p(x)h'(x)+q(x)h(x)=0$$

$$\Rightarrow \int dx\, f(x)h''(x)y(x)=f(x)\left(h'(x)y(x)-y'(x)h(x)\right)$$

$$h(x)\ solution\ de\ h''(x)+q(x)h(x)=0$$

$$\Rightarrow \int dx\, f(x)p(x)h'(x)y(x)=f(x)\left(h'(x)y(x)-y'(x)h(x)\right)$$

Fort de ces quelques résultats commençons par les fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce et leur intégration directe. Il vient :

$$\left(1-x^2\right)y''(x)-(2\lambda+1)x\,y'(x)+\nu(\nu+2\lambda)y(x)=0$$

$$\Leftrightarrow y''(x)-(2\lambda+1)\frac{x}{\left(1-x^2\right)}y'(x)+\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{\left(1-x^2\right)}y(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} p(x)=-(2\lambda+1)\dfrac{x}{\left(1-x^2\right)} \\ q(x)=\nu(\nu+2\lambda)\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)} \end{cases}.$$

Calculons la fonction f(x) :

$$p(x)=-\frac{(2\lambda+1)}{\left(1-x^2\right)} \Rightarrow -(2\lambda+1)\int\frac{xdx}{\left(1-x^2\right)}=\frac{(2\lambda+1)}{2}Log\left(1-x^2\right)$$

$$f(x)=e^{\int dxp(x)}=e^{\frac{(2\lambda+1)}{2}Log\left(1-x^2\right)}=\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} \Rightarrow f(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}.$$

Prenons h(x) solution de l'équation inhomogène :

$$h''(x)-\frac{(2\lambda+1)x}{\left(1-x^2\right)}h'(x)+\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{\left(1-x^2\right)}h(x)=\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}}$$

$$\textit{Cherchons } h(x) \textit{ sous la forme } h(x)=\left(1-x^2\right)^{\alpha} \quad h'(x)=-2\alpha\, x\left(1-x^2\right)^{\alpha-1}$$

$$h''(x)=4\alpha(\alpha-1)x^2\left(1-x^2\right)^{\alpha-2}-2\alpha\left(1-x^2\right)^{\alpha-1}=\left(1-x^2\right)^{\alpha-2}\left(2\alpha(2\alpha-1)x^2-2\alpha\right)$$

$$\Rightarrow h''(x)-\frac{(2\lambda+1)x}{\left(1-x^2\right)}h'(x)+\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{\left(1-x^2\right)}h(x)=\left(1-x^2\right)^{\alpha-2}\left[x^2\left(4\alpha(\alpha+\lambda)-\nu(\nu+2\lambda)\right)-2\alpha+1+\nu(\nu+2\lambda)\right]$$

$$\textit{En posant } \alpha=\frac{1-2\lambda}{2}\Rightarrow h''(x)-\frac{(2\lambda+1)x}{\left(1-x^2\right)}h'(x)+\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{\left(1-x^2\right)}h(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1+2\lambda}{2}}(\nu+1)(\nu+2\lambda-1)$$

$$\Rightarrow h(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(1-2\lambda)}{2}}}{(\nu+1)(\nu+2\lambda-1)} \textit{ solution de } h''(x)-\frac{(2\lambda+1)x}{\left(1-x^2\right)}h'(x)+\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{\left(1-x^2\right)}h(x)=\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}}$$

Autrement dit le premier résultat important est le suivant :

$$\int dx\, y(x)=f(x)\left(h'(x)y(x)-y'(x)h(x)\right)$$

$$h(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(1-2\lambda)}{2}}}{(\nu+1)(\nu+2\lambda-1)} \quad h'(x)=\frac{(2\lambda-1)x\left(1-x^2\right)^{-\frac{(1+2\lambda)}{2}}}{(\nu+1)(\nu+2\lambda-1)} \qquad f(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}$$

$$\int dx\, C_\nu^\lambda(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}\frac{\left((2\lambda-1)x\left(1-x^2\right)^{-\frac{(1+2\lambda)}{2}}C_\nu^\lambda(x)-\left(1-x^2\right)\left(1-x^2\right)^{-\frac{(1+2\lambda)}{2}}C_\nu^\lambda{}'(x)\right)}{(\nu+1)(\nu+2\lambda-1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\displaystyle\int dx\, C_\nu^\lambda(x)=\frac{\left((2\lambda-1)xC_\nu^\lambda(x)-\left(1-x^2\right)C_\nu^\lambda{}'(x)\right)}{(\nu+1)(\nu+2\lambda-1)} & \textit{première espèce}\\ \displaystyle\int dx\, C_{(Q),\nu}^\lambda(x)=\frac{\left((2\lambda-1)xC_{(Q),\nu}^\lambda(x)-\left(1-x^2\right)C_{(Q),\nu}^\lambda{}'(x)\right)}{(\nu+1)(\nu+2\lambda-1)} & \textit{deuxième espèce}\end{cases}$$

En intégrant les deux formules de dérivation des fonctions de Gegenbauer, il vient :

$$-\left(1-x^2\right)C_\nu^\lambda{}'(x)=\nu\, x\, C_\nu^\lambda(x)-(2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(x)$$

$$-\left(1-x^2\right)C_\nu^\lambda{}'(x)=(\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(x)-(2\lambda+\nu)xC_\nu^\lambda(x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\int dx\, C_\nu^\lambda(x)=\dfrac{\left(xC_\nu^\lambda(x)-C_{\nu-1}^\lambda(x)\right)}{(\nu+1)} & \textit{première espèce}\\ \int dx\, C_{(Q),\nu}^\lambda(x)=\dfrac{\left(xC_{(Q),\nu}^\lambda(x)-C_{(Q),\nu-1}^\lambda(x)\right)}{(\nu+1)} & \textit{deuxième espèce}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\int dx\, C_\nu^\lambda(x)=\dfrac{\left(C_{\nu+1}^\lambda(x)-xC_\nu^\lambda(x)\right)}{(\nu+2\lambda-1)} & \textit{première espèce}\\ \int dx\, C_{(Q),\nu}^\lambda(x)=\dfrac{\left(C_{(Q),\nu+1}^\lambda(x)-xC_{(Q),\nu}^\lambda(x)\right)}{(\nu+2\lambda-1)} & \textit{deuxième espèce}\end{cases}$$

$$(\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z)=2(\lambda+\nu)zC_\nu^\lambda(z)-(2\lambda+\nu-1)C_{\nu-1}^\lambda(z)$$

$$\textit{Comme}\quad xC_\nu^\lambda(x)=\frac{C_{\nu+1}^\lambda(x)(\nu+1)+(2\lambda+\nu-1)C_{\nu-1}^\lambda(x)}{2(\lambda+\nu)}\Rightarrow\frac{\left(C_{\nu+1}^\lambda(x)-xC_\nu^\lambda(x)\right)}{(\nu+2\lambda-1)}=\frac{\left(C_{\nu+1}^\lambda(x)-C_{\nu-1}^\lambda(x)\right)}{2(\lambda+\nu)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\int dx\, C_\nu^\lambda(x)=\dfrac{\left(xC_{\nu+1}^\lambda(x)-C_{\nu-1}^\lambda(x)\right)}{2(\lambda+\nu)} & \textit{première espèce}\\ \int dx\, C_{(Q),\nu}^\lambda(x)=\dfrac{\left(xC_{(Q),\nu+1}^\lambda(x)-C_{(Q),\nu-1}^\lambda(x)\right)}{2(\lambda+\nu)} & \textit{deuxième espèce}\end{cases}$$

Le dernier résultat est une intégrale indéfinie connue (voir A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov, O.I.Marichev-Integrals and Series - Volume 2 - Special Functions, page 52, section 1.14.5 formule 1).

Toutes les intégrales indéfinies plus haut sont intimement liées par les relation de récurrence des fonctions de Gegenbauer avec des ordres ascendant ou descendant, ce qui permet finalement de donner une dernière intégrale indéfinie connue :

$$\Rightarrow\int dx\, C_\nu^\lambda(x)=\frac{C_{\nu+1}^{\lambda-1}(x)}{2(\lambda-1)}\quad\textit{première espèce}\quad\int dx\, C_{(Q),\nu}^\lambda(x)=\frac{C_{(Q),\nu+1}^{\lambda-1}(x)}{2(\lambda-1)}\quad\textit{deuxième espèce}$$

qui est tout simplement l'inverse de la formule de dérivation donnée auparavant (voir précédemment). En conclusion ces intégrales indéfinies obtenues par le procédé de J.T.Conway sont également déjà connues moyennant quelques petites manipulations calculatoires.

En parallèle donnons l'intégrale des fonctions solutions de l'équation différentielle du second degré :

$$y(x) \quad solution\ de : \left(1-x^2\right)y''(x) - 2(\lambda+1)\,x\,y'(x) + (\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)y(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}\left(C_1 P_\nu^\lambda(x) + C_2 Q_\nu^\lambda(x)\right)$$

$P_\mu^\nu(z), Q_\mu^\nu(z)$ *fonctions associées de Legendre de première et deuxième espèce*

$$\Leftrightarrow y''(x) - 2(\lambda+1)\frac{x}{\left(1-x^2\right)}y'(x) + \frac{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)}{\left(1-x^2\right)}y(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} p(x) = -(\lambda+1)\dfrac{2x}{\left(1-x^2\right)} \\ q(x) = (\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)} \end{cases}$$

$$\int dx\, p(x) = (\lambda+1)Log\left(1-x^2\right) \Rightarrow f(x) = e^{\int dx\, p(x)} = \left(1-x^2\right)^{\lambda+1}$$

Prenons h(x) solution de l'équation inhomogène suivante :

$$h(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{-\lambda}}{(\nu+\lambda)(\nu-\lambda+1)}\ solution\, de\ h''(x) - \frac{2(\lambda+1)x}{\left(1-x^2\right)}h'(x) + \frac{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)}{\left(1-x^2\right)}h(x) = \frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\lambda+1}}$$

D'où le second résultat portant sur des intégrales indéfinies des fonctions de Legendre associées :

$$\int dx\, y(x) = f(x)\left(h'(x)y(x) - y'(x)h(x)\right) \quad h(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{-\lambda}}{(\nu+\lambda)(\nu-\lambda+1)} \quad h'(x) = \frac{2\lambda\, x\left(1-x^2\right)^{-\lambda-1}}{(\nu+\lambda)(\nu-\lambda+1)}$$

$$f(x) = \left(1-x^2\right)^{(\lambda+1)} \quad y(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x) \quad ou \quad y(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^\lambda(x)$$

$$\left(\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x)\right)' = \left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}P_\nu^{\lambda\prime}(x) + \lambda\, x\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}-1}P_\nu^\lambda(x)$$

$$\left(\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^\lambda(x)\right)' = \left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^{\lambda\prime}(x) + \lambda\, x\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}-1}Q_\nu^\lambda(x)$$

$$\Rightarrow \int dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x) =$$

$$= \frac{\left(1-x^2\right)^{(\lambda+1)}}{(\nu+\lambda)(\nu-\lambda+1)}\left(2\lambda\, x\left(1-x^2\right)^{-\lambda}\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}-1}P_\nu^\lambda(x) - \left(1-x^2\right)^{-\lambda}\left[\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}P_\nu^{\lambda\prime}(x) + \lambda x\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}-1}P_\nu^\lambda(x)\right]\right)$$

$$= \frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}}{(\nu+\lambda)(\nu-\lambda+1)}\left(\lambda\, xP_\nu^\lambda(x) - \left(1-x^2\right)P_\nu^{\lambda\prime}(x)\right)$$

$$\Rightarrow \int dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}\left(\lambda\, xP_\nu^\lambda(x) - \left(1-x^2\right)P_\nu^{\lambda\prime}(x)\right)}{(\nu+\lambda)(\nu-\lambda+1)}$$

$$\Rightarrow \int dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^\lambda(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}\left(\lambda\, xQ_\nu^\lambda(x) - \left(1-x^2\right)Q_\nu^{\lambda\prime}(x)\right)}{(\nu+\lambda)(\nu-\lambda+1)}$$

En utilisant les deux formules de dérivation, il vient :

$$-\left(1-x^2\right)P_\nu^{\lambda}{}'(x)=\nu\, xP_\nu^\lambda(x)-\left(\lambda+\nu\right)P_{\nu-1}^\lambda(x)$$

$$-\left(1-x^2\right)P_\nu^{\lambda}{}'(x)=\left(\nu+1-\lambda\right)P_{\nu+1}^\lambda(x)-\left(\nu+1\right)xP_\nu^\lambda(x)$$

$$\Rightarrow\int dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}\left(xP_\nu^\lambda(x)-P_{\nu-1}^\lambda(x)\right)}{\left(\nu-\lambda+1\right)}$$

$$\Rightarrow\int dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^\lambda(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}\left(xQ_\nu^\lambda(x)-Q_{\nu-1}^\lambda(x)\right)}{\left(\nu-\lambda+1\right)}$$

$$\Rightarrow\int dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}\left(P_{\nu+1}^\lambda(x)-xP_\nu^\lambda(x)\right)}{\left(\nu+\lambda\right)}$$

$$\Rightarrow\int dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^\lambda(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}\left(Q_{\nu+1}^\lambda(x)-xQ_\nu^\lambda(x)\right)}{\left(\nu+\lambda\right)}.$$

Il existe déjà un résultat connu de cette intégrale indéfinie :

$$\Rightarrow\int dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x)=-\left(1-x^2\right)^{\frac{1-\lambda}{2}}P_\nu^{\lambda-1}(x)$$

$$\Rightarrow\int dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^\lambda(x)=-\left(1-x^2\right)^{\frac{1-\lambda}{2}}Q_\nu^{\lambda-1}(x).$$

Il suffit d'introduire les formules de récurrence sur les degrés et les ordres :

$$\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}P_\nu^{\mu-1}(z)=\frac{P_{\nu-1}^\mu(z)-zP_\nu^\mu(z)}{\left(\nu-\mu+1\right)}\quad\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}P_\nu^{\mu-1}(z)=\frac{zP_\nu^\mu(z)-P_{\nu+1}^\mu(z)}{\left(\mu+\nu\right)}\quad\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}P_\nu^{\mu-1}(z)=\frac{P_{\nu-1}^\mu(z)-P_{\nu+1}^\mu(z)}{2\nu+1}$$

$$\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}P_\nu^{\mu+1}(z)=\left(\nu-\mu\right)zP_\nu^\mu(z)-\left(\mu+\nu\right)P_{\nu-1}^\mu(z)\quad\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}P_\nu^{\mu+1}(z)=\left(\nu-\mu+1\right)P_{\nu+1}^\mu(z)-\left(\nu+\mu+1\right)zP_\nu^\mu(z)$$

$$\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}P_\nu^{\mu+1}(z)=\frac{\left(\nu-\mu+1\right)\left(\nu-\mu\right)P_{\nu+1}^\mu(z)-\left(\nu+\mu+1\right)\left(\mu+\nu\right)P_{\nu-1}^\mu(z)}{\left(2\nu+1\right)}$$

Pour retrouver ce résultat, il suffit d'introduire l'une de ces formules, et il vient :

$$\int dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}\left(xP_\nu^\lambda(x)-P_{\nu-1}^\lambda(x)\right)}{\left(\nu-\lambda+1\right)}=$$

Or $\quad -\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}P_\nu^{\lambda-1}(z)=\dfrac{zP_\nu^\lambda(z)-P_{\nu-1}^\lambda(z)}{\left(\nu-\lambda+1\right)}\Rightarrow\int dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x)=-\left(1-z^2\right)^{-\frac{(\lambda-1)}{2}}P_\nu^{\lambda-1}(z).$

C'est l'intégrale indéfinie connue donnée dans A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov, O.I.Marichev-Integrals and Series - Volume 3 – More Special Functions, page 34 édition russe, section 1.12.1 formule 8

Intégrales indéfinies des fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce pondérées

Prenons le choix h(x)=1, il vient immédiatement :

$$\int dx\, f(x)q(x)y(x) = -f(x)y'(x)$$

$$q(x) = \nu(\nu+2\lambda)\frac{1}{(1-x^2)} \quad f(x) = (1-x^2)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int dx (1-x^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} C_\nu^\lambda(x) = -\dfrac{(1-x^2)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_\nu^\lambda{}'(x)}{\nu(\nu+2\lambda)} \\ \int dx (1-x^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} C_{(Q),\nu}^\lambda(x) = -\dfrac{(1-x^2)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{(Q),\nu}^\lambda{}'(x)}{\nu(\nu+2\lambda)} \end{cases}$$

Comme il existe une formule liant la dérivée des fonctions de Gegenbauer avec les fonctions de Gegenbauer d'ordre supérieur, il vient :

$$C_\nu^\lambda{}'(x) = 2\lambda C_{\nu-1}^{\lambda+1}(x) \Rightarrow \begin{cases} \int dx (1-x^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} C_\nu^\lambda(x) = -\dfrac{2\lambda}{\nu(\nu+2\lambda)}(1-x^2)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{\nu-1}^{\lambda+1}(x) \\ \int dx (1-x^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} C_{(Q),\nu}^\lambda(x) = -\dfrac{2\lambda}{\nu(\nu+2\lambda)}(1-x^2)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{(Q),\nu-1}^{\lambda+1}(x) \end{cases}$$

Le dernier résultat est encore une intégrale indéfinie connue (voir A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov, O.I.Marichev-Integrals and Series - Volume 2 - Special Functions, page 53, section 1.14.5, formule 7).

En utilisant l'une des formules de dérivation des fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce, il vient :

$$-(1-x^2)C_\nu^\lambda{}'(x) = \nu\, x\, C_\nu^\lambda(x) - (2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(x)$$

$$-(1-x^2)C_\nu^\lambda{}'(x) = (\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(x) - (2\lambda+\nu)xC_\nu^\lambda(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int dx (1-x^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} C_\nu^\lambda(x) = \dfrac{(1-x^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}}{\nu(\nu+2\lambda)}\left(\nu\, x\, C_\nu^\lambda(x) - (2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(x)\right) \\ \int dx (1-x^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} C_{(Q),\nu}^\lambda(x) = \dfrac{(1-x^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}}{\nu(\nu+2\lambda)}\left(\nu\, x\, C_{(Q),\nu}^\lambda(x) - (2\lambda-1+\nu)C_{(Q),\nu-1}^\lambda(x)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int dx (1-x^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} C_\nu^\lambda(x) = \dfrac{(1-x^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}}{\nu(\nu+2\lambda)}\left((\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(x) - (2\lambda+\nu)xC_\nu^\lambda(x)\right) \\ \int dx (1-x^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} C_{(Q),\nu}^\lambda(x) = \dfrac{(1-x^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}}{\nu(\nu+2\lambda)}\left((\nu+1)C_{(Q),\nu+1}^\lambda(x) - (2\lambda+\nu)xC_{(Q),\nu}^\lambda(x)\right) \end{cases}$$

En utilisant la forme différemment normalisée des polynômes de Gegenbauer (introduite par Frye et Efthimiou), une fois étendue aux fonctions de première et deuxième espèce, les formules sont encore plus concises :

$$C_\nu^{\frac{n-2}{2}}(z) = C_\nu^{(1),n}(z)\frac{\Gamma(n-2+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)} \quad \begin{cases} -(1-x^2)C_\nu^{(1),n}{}'(z) = \nu\left(x\,C_\nu^{(1),n}(x) - C_{\nu-1}^{(1),n}(x)\right) \\ -(1-x^2)C_\nu^{(1),n}{}'(z) = (\nu+n-2)\left(C_{\nu+1}^{(1),n}(x) - xC_\nu^{(1),n}(x)\right) \end{cases}$$

$$\int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}C_\nu^\lambda(x) = -\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}C_\nu^\lambda{}'(x)}{\nu(\nu+2\lambda)} \Leftrightarrow \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(n-3)}{2}}C_\nu^{(1),n}(x) = -\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(n-1)}{2}}C_\nu^{(1),n}{}'(x)}{\nu(\nu+n-2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(n-3)}{2}}C_\nu^{(1),n}(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(n-3)}{2}}}{(\nu+n-2)}\left(x\,C_\nu^{(1),n}(x) - C_{\nu-1}^{(1),n}(x)\right) \\ \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(n-3)}{2}}C_{(Q),\nu}^{(1),n}(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(n-3)}{2}}}{(\nu+n-2)}\left(x\,C_{(Q),\nu}^{(1),n}(x) - C_{(Q),\nu-1}^{(1),n}(x)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(n-3)}{2}}C_\nu^{(1),n}(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(n-3)}{2}}}{\nu}\left(C_{\nu+1}^{(1),n}(x) - xC_\nu^{(1),n}(x)\right) \\ \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(n-3)}{2}}C_{(Q),\nu}^{(1),n}(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(n-3)}{2}}}{\nu}\left(C_{(Q),\nu+1}^{(1),n}(x) - xC_{(Q),\nu}^{(1),n}(x)\right) \end{cases}$$

En parallèle donnons également la forme d'intégrales indéfinies avec les fonctions de Legendre associées :

$$\int dx\, f(x)q(x)y(x) = -f(x)y'(x)$$

$$q(x) = \frac{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)}{\left(1-x^2\right)} \quad f(x) = \left(1-x^2\right)^{(\lambda+1)} \Rightarrow f(x)q(x) = (\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)\left(1-x^2\right)^\lambda$$

$$y(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x) \quad ou \quad y(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^\lambda(x)$$

$$f(x)\left(\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x)\right)' = \left(1-x^2\right)^{+\frac{\lambda}{2}+1}P_\nu^\lambda{}'(x) + \lambda\,x\left(1-x^2\right)^{+\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x)$$

$$f(x)\left(\left(1-x^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^\lambda(x)\right)' = \left(1-x^2\right)^{+\frac{\lambda}{2}+1}Q_\nu^\lambda{}'(x) + \lambda\,x\left(1-x^2\right)^{+\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^\lambda(x)$$

$$\Rightarrow \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x) = -\left(1-x^2\right)^{+\frac{\lambda}{2}}\frac{\left(1-x^2\right)P_\nu^\lambda{}'(x) + \lambda\,xP_\nu^\lambda(x)}{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)}$$

$$\Rightarrow \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^\lambda(x) = -\left(1-x^2\right)^{+\frac{\lambda}{2}}\frac{\left(1-x^2\right)Q_\nu^\lambda{}'(x) + \lambda\,xQ_\nu^\lambda(x)}{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)}$$

.

Compte tenu des formules de dérivation des fonctions de Legendre associées, il vient :

$$-\left(1-x^2\right)P_\nu^\lambda{}'(x)=\nu\, xP_\nu^\lambda(x)-(\lambda+\nu)P_{\nu-1}^\lambda(x)$$

$$-\left(1-x^2\right)P_\nu^\lambda{}'(x)=(\nu+1-\lambda)P_{\nu+1}^\lambda(x)-(\nu+1)xP_\nu^\lambda(x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(-\left(1-x^2\right)P_\nu^\lambda{}'(x)-\lambda xP_\nu^\lambda(x)\right)=(\nu-\lambda)xP_\nu^\lambda(x)-(\lambda+\nu)P_{\nu-1}^\lambda(x)\\ \left(-\left(1-x^2\right)P_\nu^\lambda{}'(x)-\lambda xP_\nu^\lambda(x)\right)=(\nu+1-\lambda)P_{\nu+1}^\lambda(x)-(\nu+1+\lambda)xP_\nu^\lambda(x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x)=\left(1-x^2\right)^{+\frac{\lambda}{2}}\dfrac{(\nu-\lambda)xP_\nu^\lambda(x)-(\lambda+\nu)P_{\nu-1}^\lambda(x)}{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)}\\ \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^\lambda(x)=\left(1-x^2\right)^{+\frac{\lambda}{2}}\dfrac{(\nu-\lambda)xQ_\nu^\lambda(x)-(\lambda+\nu)Q_{\nu-1}^\lambda(x)}{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x)=\left(1-x^2\right)^{+\frac{\lambda}{2}}\dfrac{(\nu+1-\lambda)P_{\nu+1}^\lambda(x)-(\nu+1+\lambda)xP_\nu^\lambda(x)}{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)}\\ \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^\lambda(x)=\left(1-x^2\right)^{+\frac{\lambda}{2}}\dfrac{(\nu+1-\lambda)Q_{\nu+1}^\lambda(x)-(\nu+1+\lambda)xQ_\nu^\lambda(x)}{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)}\end{cases}.$$

Avec les formules de récurrence sur les degrés et les ordres, il vient :

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}P_\nu^{\lambda+1}(x)=(\nu-\lambda)xP_\nu^\lambda(x)-(\lambda+\nu)P_{\nu-1}^\lambda(x)$$

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}P_\nu^{\lambda+1}(x)=(\nu-\lambda+1)P_{\nu+1}^\lambda(x)-(\nu+\lambda+1)xP_\nu^\lambda(x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}P_\nu^\lambda(x)=\left(1-x^2\right)^{+\frac{\lambda+1}{2}}\dfrac{P_\nu^{\lambda+1}(x)}{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)}\\ \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}Q_\nu^\lambda(x)=\left(1-x^2\right)^{+\frac{\lambda+1}{2}}\dfrac{Q_\nu^{\lambda+1}(x)}{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)}\end{cases}.$$

C'est exactement l'intégrale indéfinie donnée également dans _*A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov, O.I.Marichev-Integrals and Series - Volume 3 – More Special Functions, page 34 édition russe, section 1.12.1 formule 9.*_

*Donc pour l'instant, par ce procédé on ne trouve pas de nouvelles intégrales.*

*Intégrales indéfinies des fonctions de Gegenbauer à l'aide d'équations conjuguées*

La fonction h(x) suivante est solution d'une équation inhomogène conjuguée de celle de Gegenbauer :

$$\Rightarrow h(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(1-2\lambda)}{2}}}{(\nu(\nu+1)+\lambda(1-\lambda)-1)}\ \text{solution de}\ h''(x)-\frac{(2\lambda+1)x}{\left(1-x^2\right)}h'(x)+\frac{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)}{\left(1-x^2\right)}h(x)=\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}}$$

L'intégrale indéfinie prend la forme suivante en utilisant une équation conjuguée de l''équation différentielle de départ :

$$\int dx\, f(x)\big(h''(x)+p(x)h'(x)+q(x)h(x)\big)y(x)=f(x)\big(h'(x)y(x)-y'(x)h(x)\big)$$

$$h(x)\quad \text{solution de } h''(x)+p(x)h'(x)+r(x)h(x)=\frac{1}{f(x)}\Rightarrow h''(x)+p(x)h'(x)=\frac{1}{f(x)}-r(x)h(x)$$

$$\text{Notons } \tilde{h}(x)\quad \text{solution de } \tilde{h}''(x)+p(x)\tilde{h}'(x)+q(x)\tilde{h}(x)=\frac{1}{f(x)}$$

$$\int dx\, f(x)\big(h''(x)+p(x)h'(x)+q(x)h(x)\big)y(x)=\int dx\, f(x)\left(\frac{1}{f(x)}+\big(q(x)-r(x)\big)h(x)\right)y(x)=$$

$$=\int dx\, y(x)+\int dx\, f(x)\big(q(x)-r(x)\big)h(x)y(x)$$

$$\Rightarrow \int dx\, f(x)\big(q(x)-r(x)\big)h(x)y(x)=f(x)\big(h'(x)y(x)-y'(x)h(x)\big)-\int dx\, y(x)$$

$$\text{Si}\quad r(x)=\alpha\, q(x)$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)\int dx\, f(x)q(x)h(x)y(x)=f(x)\big(h'(x)y(x)-y'(x)h(x)\big)-\int dx\, y(x)$$

$$\text{Si}\quad r(x)=\alpha\, q(x)\quad \text{et}\quad h''(x)+p(x)h'(x)=0\Rightarrow \alpha\, q(x)h(x)=\frac{1}{f(x)}\Rightarrow q(x)h(x)=\frac{1}{\alpha\, f(x)}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{(1-\alpha)}{\alpha}+1\right)\int dx\, y(x)=\frac{1}{\alpha}\int dx\, y(x)=f(x)\big(h'(x)y(x)-y'(x)h(x)\big)=\frac{1}{\alpha}f(x)\big(\tilde{h}'(x)y(x)-y'(x)\tilde{h}(x)\big)$$

$$\text{intégrale déjà calculée puisque } h(x)=\frac{\tilde{h}(x)}{\alpha}$$

$$\text{Si}\quad r(x)=\alpha\, q(x)\quad \text{et}\quad h''(x)+p(x)h'(x)=\frac{\beta}{f(x)}\Rightarrow \alpha\, q(x)h(x)=\frac{1-\beta}{f(x)}\quad \text{de même } \tilde{h}''(x)+p(x)\tilde{h}'(x)=\frac{\tilde{\beta}}{f(x)}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha}+1\right)\int dx\, y(x)=\frac{\big(1-\beta(1-\alpha)\big)}{\alpha}\int dx\, y(x)=f(x)\big(h'(x)y(x)-y'(x)h(x)\big)=$$

$$=\frac{\big(1-\beta(1-\alpha)\big)}{\alpha}f(x)\big(\tilde{h}'(x)y(x)-y'(x)\tilde{h}(x)\big)$$

$$h''(x)+p(x)h'(x)=\frac{\beta}{f(x)}\Rightarrow q(x)h(x)=\frac{1-\beta}{\alpha f(x)}\quad \text{et}\quad q(x)\tilde{h}(x)=\frac{1-\tilde{\beta}}{f(x)}\Rightarrow h(x)=\frac{1-\beta}{\alpha\,(1-\tilde{\beta})}\tilde{h}(x)$$

$$\text{intégrale déjà calculée puisque } h(x)=\frac{\big(1-\beta(1-\alpha)\big)}{\alpha}\tilde{h}(x)\quad \text{il suffit de prendre } \frac{1-\beta}{1-\tilde{\beta}}=1-\beta(1-\alpha)$$

Avec la fonction :

$$t(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{(1-2\lambda)}{2}}\qquad f(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}\Rightarrow t''(x)+p(x)t'(x)=(2\lambda-1)\left(1-x^2\right)^{-\frac{(2\lambda+1)}{2}}=\frac{(2\lambda-1)}{f(x)}.$$

Cette la solution de l'équation conjuguée ne peut servir pour générer de nouvelles intégrales indéfinies, puisque l'une des conditions sur l'équation différentielle est respectée.

<u>Intégrales indéfinies des fonctions de Gegenbauer à l'aide de fonctions h(x) quelconques</u>

Posons h(x) solution de :

$$\Rightarrow -\frac{(2\lambda+1)x}{\left(1-x^2\right)}h'(x)+\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{\left(1-x^2\right)}h(x)=0 \Leftrightarrow (2\lambda+1)xh'(x)=\nu(\nu+2\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{1}{x}\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)} \Rightarrow Log(h(x))'=Log(x)'\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)} \Rightarrow Log(h(x))=Log(x)\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}$$

$$\Rightarrow h(x)=x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}} \Rightarrow h''(x)=\frac{x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}-2}}{(2\lambda+1)^2}\nu(\nu+2\lambda)(\nu(\nu+2\lambda)-2\lambda-1)$$

Dans ce cas l'intégrale indéfinie s'écrit :

$$\int dx\, f(x)\left(h''(x)-\frac{(2\lambda+1)x}{\left(1-x^2\right)}h'(x)+\frac{(\nu)(\nu+2\lambda)}{\left(1-x^2\right)}h(x)\right)y(x)=f(x)\left(h'(x)y(x)-y'(x)h(x)\right)$$

$$\Rightarrow \int dx\, f(x)h''(x)y(x)=f(x)\left(h'(x)y(x)-y'(x)h(x)\right) \quad f(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} \quad h(x)=x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}}$$

$$\Rightarrow h''(x)=\frac{x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}-2}}{(2\lambda+1)^2}\nu(\nu+2\lambda)(\nu(\nu+2\lambda)-2\lambda-1) \quad h'(x)=\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}-1}=\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}\frac{h(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{2\lambda+1)}-2}C_\nu^\lambda(x)=\frac{(2\lambda+1)\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}-1}\left(\nu(\nu+2\lambda)C_\nu^\lambda(x)-x(2\lambda+1)C_\nu^\lambda{}'(x)\right)}{\nu(\nu+2\lambda)(\nu(\nu+2\lambda)-2\lambda-1)}$$

$$Comme \quad -C_\nu^\lambda{}'(x)=\frac{\nu\, x\, C_\nu^\lambda(x)-(2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(x)}{\left(1-x^2\right)} \Rightarrow \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{2\lambda+1)}-2}C_\nu^\lambda(x)=$$

$$=\frac{(2\lambda+1)\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}-1}\left(\nu(\nu+2\lambda)C_\nu^\lambda(x)\left(1-x^2\right)+x(2\lambda+1)\left(\nu\, x\, C_\nu^\lambda(x)-(2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(x)\right)\right)}{\nu(\nu+2\lambda)(\nu(\nu+2\lambda)-2\lambda-1)\left(1-x^2\right)}$$

$$=\frac{(2\lambda+1)\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}-1}\left(\nu\, C_\nu^\lambda(x)\left[(\nu+2\lambda)\left(1-x^2\right)+(2\lambda+1)x^2\right]-x(2\lambda+1)(2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(x)\right)}{\nu(\nu+2\lambda)(\nu(\nu+2\lambda)-2\lambda-1)}$$

$$=\frac{(2\lambda+1)^2\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}-1}\left(\nu\, C_\nu^\lambda(x)\left[(\nu+2\lambda)+(1-\nu)x^2\right]-x(2\lambda+1)(2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(x)\right)}{\nu(\nu+2\lambda)(\nu(\nu+2\lambda)-2\lambda-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}-2}C_\nu^\lambda(x)= \\ =\frac{(2\lambda+1)^2\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}x^{\frac{(\nu-1)(\nu+2\lambda+1)}{(2\lambda+1)}}\left(\nu\, C_\nu^\lambda(x)\left[(\nu+2\lambda)+(1-\nu)x^2\right]-x(2\lambda+1)(2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(x)\right)}{\nu(\nu+2\lambda)(\nu(\nu+2\lambda)-2\lambda-1)} \\ \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}-2}C_{(Q),\nu}^\lambda(x)= \\ =\frac{(2\lambda+1)^2\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}x^{\frac{(\nu-1)(\nu+2\lambda+1)}{(2\lambda+1)}}\left(\nu\, C_{(Q),\nu}^\lambda(x)\left[(\nu+2\lambda)+(1-\nu)x^2\right]-x(2\lambda+1)(2\lambda-1+\nu)C_{(Q),\nu-1}^\lambda(x)\right)}{\nu(\nu+2\lambda)(\nu(\nu+2\lambda)-2\lambda-1)} \end{cases}$$

.

Avec la deuxième formule de dérivation :

$$\Rightarrow \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{2\lambda+1)}-2} C_\nu^\lambda(x) = \frac{(2\lambda+1)\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}-1}\left(\nu(\nu+2\lambda)C_\nu^\lambda(x) - x(2\lambda+1)C_\nu^{\lambda}{}'(x)\right)}{\nu(\nu+2\lambda)\left(\nu(\nu+2\lambda)-2\lambda-1\right)}$$

$$Comme \quad -C_\nu^{\lambda}{}'(x) = \frac{(\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(x) - (2\lambda+\nu)xC_\nu^\lambda(x)}{\left(1-x^2\right)} \Rightarrow \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{2\lambda+1)}-2} C_\nu^\lambda(x) =$$

$$= \frac{(2\lambda+1)\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}-1}\left(\nu(\nu+2\lambda)C_\nu^\lambda(x)\left(1-x^2\right) + x(2\lambda+1)\left((\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(x) - (2\lambda+\nu)xC_\nu^\lambda(x)\right)\right)}{\nu(\nu+2\lambda)\left(\nu(\nu+2\lambda)-2\lambda-1\right)\left(1-x^2\right)}$$

$$= \frac{(2\lambda+1)\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} x^{\frac{(\nu-1)(\nu+2\lambda+1)}{(2\lambda+1)}}\left((\nu+2\lambda)C_\nu^\lambda(x)\left(\nu - x^2(\nu+2\lambda+1)\right) + x(2\lambda+1)(\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(x)\right)}{\nu(\nu+2\lambda)\left(\nu(\nu+2\lambda)-2\lambda-1\right)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}-2} C_\nu^\lambda(x) = \\ = \frac{(2\lambda+1)\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} x^{\frac{(\nu-1)(\nu+2\lambda+1)}{(2\lambda+1)}}\left((\nu+2\lambda)C_\nu^\lambda(x)\left(\nu - x^2(\nu+2\lambda+1)\right) + x(2\lambda+1)(\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(x)\right)}{\nu(\nu+2\lambda)\left(\nu(\nu+2\lambda)-2\lambda-1\right)} \\ \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} x^{\frac{\nu(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)}-2} C_{(Q),\nu}^\lambda(x) = \\ = \frac{(2\lambda+1)\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} x^{\frac{(\nu-1)(\nu+2\lambda+1)}{(2\lambda+1)}}\left((\nu+2\lambda)C_{(Q),\nu}^\lambda(x)\left(\nu - x^2(\nu+2\lambda+1)\right) + x(2\lambda+1)(\nu+1)C_{(Q),\nu+1}^\lambda(x)\right)}{\nu(\nu+2\lambda)\left(\nu(\nu+2\lambda)-2\lambda-1\right)} \end{cases}$$

.

Toute la question est de savoir si ce genre d'intégrale indéfinie est exploitable dans un problème physique !

Calcul des normes des fonctions de Gegenbauer, des fonctions propres d'un problème aux limites, approche de Sturm-Liouville

Partons de l'équation de Gegenbauer, appliquée à deux fonctions y1(v,z), y2(v,z) solutions :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}}\frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\frac{dy_1}{dz}\right)+\nu_1(\nu_1+2\lambda)y_1=0\\ \frac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}}\frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\frac{dy_2}{dz}\right)+\nu_2(\nu_2+2\lambda)y_2=0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\left(y_2\frac{dy_1}{dz}-y_1\frac{dy_2}{dz}\right)\right)+\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(\nu_1(\nu_1+2\lambda)-\nu_2(\nu_2+2\lambda)\right)y_1y_2=0$$

$$\Rightarrow\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\left(y_2\frac{dy_1}{dz}-y_1\frac{dy_2}{dz}\right)\right]_{z_1}^{z_2}+\int_{z_1}^{z_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(\nu_1(\nu_1+2\lambda)-\nu_2(\nu_2+2\lambda)\right)y_1y_2=0$$

$$En\ posant\ \nu_2=\nu_1+d\nu\quad y_2\approx y_1+d\nu\frac{\partial y_1}{\partial\nu}\qquad\frac{dy_2}{dz}\approx\frac{\partial y_1}{\partial z}+d\nu\frac{\partial^2y_1}{\partial z\partial\nu}$$

$$\Rightarrow\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\left(\frac{\partial y_1}{\partial\nu}\frac{\partial y_1}{\partial z}-y_1\frac{\partial^2y_1}{\partial z\partial\nu}\right)\right]_{z_1}^{z_2}=(2\nu_1+2\lambda)\int_{z_1}^{z_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(y_1)^2$$

$$\Rightarrow\int_{z_1}^{z_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(y(z))^2=\frac{1}{(2\nu+2\lambda)}\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\left(\frac{\partial y(z)}{\partial\nu}\frac{\partial y(z)}{\partial z}-y(z)\frac{\partial^2y(z)}{\partial z\partial\nu}\right)\right]_{z_1}^{z_2}$$

Avec la notation des fonctions propres du problème aux limites en coordonnées ultra-sphériques, et les formules de dérivation, il vient une expression différente de la norme :

$$\int_{z_1}^{z_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(\Phi_\nu^\lambda(z)\right)^2=\frac{\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\left(\frac{\partial\Phi_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}\frac{\partial\Phi_\nu^\lambda(z)}{\partial z}-\Phi_\nu^\lambda(z)\frac{\partial^2\Phi_\nu^\lambda(z)}{\partial z\partial\nu}\right)\right]_{z_1}^{z_2}}{(2\nu+2\lambda)}$$

$$Dérivation\ valable\ pour\ toutes\ combinaisons\ linéaires\ \Phi_\nu^\lambda(z)=a\,C_\nu^\lambda(z)+b\,C_{(Q),\nu}^\lambda(z)$$

$$\frac{\partial\Phi_\nu^\lambda(z)}{\partial z}=\frac{(2\lambda-1+\nu)\Phi_{\nu-1}^\lambda(z)-\nu\,z\,\Phi_\nu^\lambda(z)}{\left(1-z^2\right)}\qquad\frac{\partial^2\Phi_\nu^\lambda(z)}{\partial z\partial\nu}=\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{(2\lambda-1+\nu)\Phi_{\nu-1}^\lambda(z)-\nu\,z\,\Phi_\nu^\lambda(z)}{\left(1-z^2\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(1-z^2\right)}\left[\Phi_{\nu-1}^\lambda(z)-z\,\Phi_\nu^\lambda(z)+(2\lambda-1+\nu)\frac{\partial\Phi_{\nu_l-1}^\lambda(z)}{\partial\nu}-\nu\,z\frac{\partial\Phi_{\nu_l}^\lambda(z)}{\partial\nu}\right]\Rightarrow$$

$$\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\left(\frac{\partial\Phi_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}\frac{\partial\Phi_\nu^\lambda(z)}{\partial z}-\Phi_\nu^\lambda(z)\frac{\partial^2\Phi_\nu^\lambda(z)}{\partial z\partial\nu}\right)\right]=\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial\Phi_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}\left[(2\lambda-1+\nu)\Phi_{\nu-1}^\lambda(z)-\nu\,z\,\Phi_\nu^\lambda(z)\right]\\-\Phi_\nu^\lambda(z)\times\\\times\left[\Phi_{\nu-1}^\lambda(z)-z\,\Phi_\nu^\lambda(z)+(2\lambda-1+\nu)\frac{\partial\Phi_{\nu_l-1}^\lambda(z)}{\partial\nu}-\nu\,z\right.\end{array}\right.\right.$$

$$=\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left((2\lambda-1+\nu)\left[\Phi_{\nu-1}^\lambda(z)\frac{\partial\Phi_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}-\Phi_\nu^\lambda(z)\frac{\partial\Phi_{\nu_l-1}^\lambda(z)}{\partial\nu}\right]-\Phi_\nu^\lambda(z)\left[\Phi_{\nu-1}^\lambda(z)-z\,\Phi_\nu^\lambda(z)\right]\right)\right]$$

.

On arrive au résultat suivant sur la norme :

$$\Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(\Phi_\nu^\lambda(z)\right)^2 = \frac{\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(\begin{array}{l}(2\lambda-1+\nu)\left[\Phi_{\nu-1}^\lambda(z)\frac{\partial\Phi_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}-\Phi_\nu^\lambda(z)\frac{\partial\Phi_{\nu_l-1}^\lambda(z)}{\partial\nu}\right]- \\ -\Phi_\nu^\lambda(z)\left[\Phi_{\nu-1}^\lambda(z)-z\,\Phi_\nu^\lambda(z)\right]\end{array}\right)\right]_{z_1}^{z_2}}{(2\nu+2\lambda)}.$$

Pour exemple, prenons un problème aux limites de Dirichlet sur une section conique pleine de l'hypersphère d'angle ϑ₀, homogène à la surface conique latérale, comme suit :

$$z_1 = Cos(\vartheta_0) = \mu_0 \quad z_2 = Cos(0) = 1 \quad \lambda = \frac{n-2}{2} \quad Solution \quad y(z) = C_\nu^\lambda(z) \quad tq \quad C_\nu^\lambda(Cos(\vartheta_0)) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mu_0}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(C_\nu^\lambda(z)\right)^2 = \frac{\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\left(\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial z}-C_\nu^\lambda(z)\frac{\partial^2 C_\nu^\lambda(z)}{\partial z\partial\nu}\right)\right]_{\mu_0}^{1}}{(2\nu+2\lambda)} = -\frac{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}{(2\nu+2\lambda)}\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial z}$$

$$Or\ \left(z^2-1\right)\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial z} = \nu\, z\, C_\nu^\lambda(z)-(2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(z) \quad ou \quad \left(z^2-1\right)\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial z} = (\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z)-(2\lambda+\nu)zC_\nu^\lambda(z)$$

$$\Rightarrow \left(1-\mu_0^2\right)\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial z}\bigg|_{z=\mu_0} = (2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(\mu_0) = -(\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(\mu_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left\|C_\nu^\lambda(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(C_\nu^\lambda(z)\right)^2 = -\frac{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu+2\lambda-1)}{(2\nu+2\lambda)}\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}C_{\nu-1}^\lambda(\mu_0) \\ ou \\ \left\|C_\nu^\lambda(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(C_\nu^\lambda(z)\right)^2 = \frac{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu+1)}{(2\nu+2\lambda)}\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}C_{\nu+1}^\lambda(\mu_0) \end{cases}$$

Autre exemple, prenons un problème aux limites de Neumann sur une section conique pleine de l'hypersphère d'angle ϑ₀, homogène à la surface conique latérale, comme suit :

$$z_1 = Cos(\vartheta_0) = \mu_0 \quad z_2 = Cos(0) = 1 \quad \lambda = \frac{n-2}{2} \quad Solution \quad y(z) = C_\nu^\lambda(z) \quad tq \quad \frac{dC_\nu^\lambda(Cos(\vartheta_0))}{d\vartheta} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mu_0}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(C_\nu^\lambda(z)\right)^2 = \frac{\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\left(\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial z}-C_\nu^\lambda(z)\frac{\partial^2 C_\nu^\lambda(z)}{\partial z\partial\nu}\right)\right]_{\mu_0}^{1}}{(2\nu+2\lambda)} = \frac{\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}C_\nu^\lambda(z)\frac{\partial^2 C_\nu^\lambda(z)}{\partial z\partial\nu}\right]_{1}^{\mu_0}}{(2\nu+2\lambda)}$$

$$\Rightarrow \left\|C_\nu^\lambda(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(C_\nu^\lambda(z)\right)^2 = \frac{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}}{(2\nu+2\lambda)}C_\nu^\lambda(\mu_0)\frac{\partial^2 C_\nu^\lambda(\mu_0)}{\partial z\partial\nu} = \frac{2\lambda}{(2\nu+2\lambda)}\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}C_\nu^\lambda(\mu_0)\frac{\partial C_{\nu-1}^{\lambda+1}(\mu_0)}{\partial\nu}$$

Ces formules généralisent les normes calculées pour un cône sphérique à trois dimensions.

Cône de révolution hyper-sphérique

Dans le système de coordonnées déjà introduit comme suit :

$$r = \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = rCos(\vartheta_n) \quad \vartheta_n \in [0,\pi] \\ x_2 = rSin(\vartheta_n)Cos(\vartheta_{n-1}) \quad \vartheta_{n-1} \in [0,\pi] \\ x_3 = rSin(\vartheta_n)Sin(\vartheta_{n-1})Cos(\vartheta_{n-2}) \quad \vartheta_{n-2} \in [0,\pi] \\ \cdots \\ x_{n-1} = rSin(\vartheta_n)Sin(\vartheta_{n-1})\cdots Sin(\vartheta_3)Cos(\vartheta_2) \quad \vartheta_3 \in [0,\pi] \\ x_n = rSin(\vartheta_n)Sin(\vartheta_{n-1})\cdots Sin(\vartheta_3)Sin(\vartheta_2) \quad \vartheta_2 = \varphi \in [0,2\pi] \end{cases}$$

$$\vartheta_2 = \varphi \rightarrow hyperlongitude \qquad \vartheta_n, \vartheta_{n-1}, \cdots \vartheta_3 \rightarrow hypercolatitude$$

.

on a évoqué des problèmes aux limites ne dépendant que des variables r et ϑ_n. Il peut s'agir de l'ensemble de l'espace à N-dimensions mais dont la nature des conditions aux limites ne sont dépendantes que de ces deux variables. Ce peut-être aussi des sous-domaines dont les limites sont également définit par une valeur fixe d'une de ces deux coordonnées. Parmi ceux-ci, introduisons un cône centrée sur l'axe x_1 dont les limites sont définies comme suit :

$$r = \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \sum_{i=2}^{n} x_i^2 = r^2 (Sin(\vartheta_n))^2 \quad C_{\Omega n} = \left\{ \vec{x} \,/\, x_1 \in [0,\infty[, \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \in \left[0, x_1^2 \left(\frac{Sin(\vartheta_0)}{Cos(\vartheta_0)} \right)^2 \right] \right\}$$

$$\partial C_{\Omega n} = \left\{ \vec{x} \,/\, x_1 \in [0,\infty[, \sum_{i=2}^{n} x_i^2 = x_1^2 (Tan(\vartheta_0))^2 \right\}$$

.

Pour x_1 donné, la section du cône est un hyper-disque de rayon :

$$D_{\Omega n-1} = \left\{ \vec{x} \,/\, x_1 \in [0,\infty[, \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \in \left[0, x_1^2 (Tan(\vartheta_0))^2\right] \right\} \quad r = \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$Rayon\ de\ l'hyperdisque \quad x_1 Tan(\vartheta_0)$$

.

Problème aux limites à l'intérieur ou l'extérieur d'une hypersphère

Problème aux limites intérieur sur une hypersphère soumise à des conditions aux limites inhomogènes de Dirichlet dépendante uniquement de l'angle ϑ_n.

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad C.L. \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f(\theta)$$

$$T(r,\theta)\big|/\,\vec{\mathbf{x}}\in\Omega_n \quad \Omega_n=\left\{\vec{\mathbf{x}}\,/\sqrt{\sum_{l=1}^{n}x_l^2}\le l_r\right\}$$

Nous simplifierons la notation en omettant l'indice l'angle ϑ. La base orthogonale des polynômes de Gegenbauer convient parfaitement pour le développement en série de la solution. Nous y appliquons la condition de finitude la solution :

$$\lambda=\frac{n-2}{2};z=Cos(\theta)\to T(r,\theta)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}\left(A_r r^l+B_r r^{-(l+2\lambda)}\right)\left(A_\theta C_l^\lambda(z)+B_\theta C_{(Q),l}^\lambda(z)\right)$$

$$Finitude\ de\ la\ solution\ en\ r=0\Rightarrow B_r=0 \quad en\ \theta=0\Rightarrow B_\theta=0$$

$$T(r,\theta)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_l r^l C_l^\lambda(Cos(\theta))$$

.

L'application de la condition aux limites, ainsi que les conditions d'orthogonalité des fonctions de Gegenbauer donnent immédiatement la solution du problème aux limites :

$$T(r,\theta)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_l\left(\frac{r}{l_r}\right)^l C_l^\lambda(Cos(\theta))$$

$$B_l=\frac{\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f(\theta)C_l^\lambda(z)}{\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(C_l^\lambda(z)\right)^2} \quad Norme\left\|C_l^\lambda(z)\right\|^2=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(C_l^\lambda(z)\right)^2=\frac{\pi 2^{1-2\lambda}\Gamma(l+2\lambda)}{l!(l+\lambda)(\Gamma(\lambda))^2}$$

$$\Rightarrow A_l=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f(\theta)C_l^\lambda(z) \quad T(r,\theta)=\frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_l\frac{l!(l+\lambda)}{\Gamma(l+2\lambda)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^l C_l^\lambda(Cos(\theta))$$

On peut séparer la fonction limite en une fonction paire et impaire de z, et tirer partie des conditions de parité des polynômes de Gegenbauer :

$$f(\theta)=\frac{f(\theta)+f(\pi-\theta)}{2}+\frac{f(\theta)-f(\pi-\theta)}{2}\Leftrightarrow f(z)=\frac{f(z)+f(-z)}{2}+\frac{f(z)-f(-z)}{2}$$

$$f^+(z)=\frac{f(z)+f(-z)}{2} \quad f^-(z)=\frac{f(z)-f(-z)}{2}$$

.

Dans cette configuration, la solution s'écrit comme suit :

$$T(r,\theta)=\frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\left(A_l^+ + A_l^-\right)\frac{l!(l+\lambda)}{\Gamma(l+2\lambda)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^l C_l^\lambda(Cos(\theta)) \quad A_l^+ = \int_{-1}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} f_l^+(z)C_l^\lambda(z)$$

$$A_l^- = \int_{-1}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} f_l^-(z)C_l^\lambda(z) \quad C_l^\lambda(-z)=(-1)^l C_l^\lambda(z) \Rightarrow \begin{cases} A_{2p+1}^+ = 0 & A_{2p}^+ \neq 0 \\ A_{2p+1}^+ \neq 0 & A_{2p}^+ = 0 \end{cases}$$

$$T(r,\theta)=\frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi}\left(\sum_{p=0}^{p=+\infty} A_{2p}^+ \frac{(2p)!(2p+\lambda)}{\Gamma(2p+2\lambda)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p} C_{2p}^\lambda(Cos(\theta)) + \sum_{p=0}^{p=+\infty}\left\{\begin{array}{l} A_{2p+1}^- \frac{(2p+1)!(2p+1+\lambda)}{\Gamma(2p+1+2\lambda)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p+1} \times \\ \times C_{2p+1}^\lambda(Cos(\theta)) \end{array}\right\}\right)$$

Prenons une fonction limite paire simple, constante f(z)=T₀ :

$$T(r,\theta)=\frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi}\sum_{p=0}^{p=+\infty} A_{2p}^+ \frac{(2p)!(2p+\lambda)}{\Gamma(2p+2\lambda)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p} C_{2p}^\lambda(Cos(\theta))$$

$$A_{2p}^+ = \int_{-1}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} f_{2p}^+(z)C_{2p}^\lambda(z) = T_0\int_{-1}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{2p}^\lambda(z)$$

$$or \int_{-1}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{2p}^\lambda(z) = 2\int_{0}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{2p}^\lambda(z)$$

$$Comme \quad l'intégrale\ indéfinie \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} C_\nu^\lambda(x) = -\frac{2\lambda}{\nu(\nu+2\lambda)}\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{\nu-1}^{\lambda+1}(x)$$

$$\int_{0}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{2p}^\lambda(z) = \left[-\frac{2\lambda}{2p(2p+2\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{2p-1}^{\lambda+1}(z)\right]_0^1 = \frac{2\lambda}{2p(2p+2\lambda)} C_{2p-1}^{\lambda+1}(0)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{2p}^\lambda(z) = \frac{4\lambda}{2p(2p+2\lambda)} C_{2p-1}^{\lambda+1}(0)$$

$$De\ plus : C_\nu^\lambda(0) = \frac{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu+2\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} \Rightarrow C_{2p-1}^{\lambda+1}(0) = \frac{2^{2p-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+\lambda+1)}{\Gamma(2p-1)\Gamma(\lambda+1)\Gamma(1-p)} = 0 \leftarrow \frac{1}{\Gamma(1-p)} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{2p}^\lambda(z) = 0 \quad p>0$$

$$Seul\ le\ terme\ p=0\ subsiste \Rightarrow T(r,\theta) = T_0\frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi}\frac{\lambda}{\Gamma(2\lambda)}\int_{-1}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}$$

$$\int_{-1}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} = \frac{\pi 2^{1-2\lambda}\Gamma(2\lambda)}{\lambda(\Gamma(\lambda))^2} \quad Norme\ de \left\|C_0^\lambda(z)\right\|^2 = \frac{\pi 2^{1-2\lambda}\Gamma(2\lambda)}{\lambda(\Gamma(\lambda))^2} \Rightarrow T(r,\theta) = T_0$$

On obtient et c'est normal la solution triviale T= T_0, conforme au principe du maximum et du minimum pris par les fonctions harmoniques quelque soit la dimension sur la frontière du domaine.

Prenons donc un exemple moins trivial avec une hypersphère dont la moitié supérieur est porté à la température T_0 et la moitié inférieure à la température $-T_0$. C'est la solution impaire que l'on va maintenant développer :

$$T(r,\theta) = T_0 \frac{(\Gamma(\lambda))^2 2^{2\lambda}}{\pi} \sum_{p=0}^{p=+\infty} A^-_{2p+1} \frac{(2p+1)!(2p+1+\lambda)}{\Gamma(2p+1+2\lambda)} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p+1} C^\lambda_{2p+1}(Cos(\theta))$$

$$avec\ A^-_{2p+1} = \int_0^1 dz(1-z^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C^\lambda_{2p+1}(z)$$

$$\int_0^1 dz(1-z^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C^\lambda_{2p+1}(z) = \left[-\frac{2\lambda}{(2p+1)(2p+1+2\lambda)}(1-z^2)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C^{\lambda+1}_{2p}(z)\right]_0^1 = \frac{2\lambda}{(2p+1)(2p+1+2\lambda)} C^{\lambda+1}_{2p}(0)$$

$$C^\lambda_\nu(0) = \frac{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu+2\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} \Rightarrow C^{\lambda+1}_{2p}(0) = \frac{2^{2p}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2p+2(\lambda+1)}{2}\right)}{\Gamma(2p+1)\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right)} = \frac{2^{2p}\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+\lambda+1)}{\Gamma(2p+1)\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right)}$$

$$\int_0^1 dz(1-z^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C^\lambda_{2p+1}(z) = \frac{\lambda 2^{2p+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+\lambda+1)}{(2p+1)(2p+1+2\lambda)\Gamma(2p+1)\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta) = T_0 \frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{p=+\infty} \frac{2^{2p+1}(2p+1+\lambda)\Gamma(p+\lambda+1)}{\Gamma(2p+2+2\lambda)\Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right)} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p+1} C^\lambda_{2p+1}(Cos(\theta))$$

$$Cas\ n=3\ \ \lambda = \frac{1}{2} \quad C^{\frac{1}{2}}_{2p+1}(Cos(\theta)) = P_{2p+1}(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow T(r,\theta) = 2T_0 \sum_{p=0}^{p=+\infty} \frac{2^{2p}(4p+3)\Gamma\left(\frac{2p+3}{2}\right)}{(2p+2)!\,\Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right)} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p+1} P_{2p+1}(Cos(\theta))$$

$$l\ impair \rightarrow \Gamma\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{2^{1-l}\sqrt{\pi}(l-1)!}{\left(\frac{l-1}{2}\right)!} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{2p+3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}$$

$$l\ impair \rightarrow \Gamma\left(-\frac{l}{2}\right) = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}} 2^l\sqrt{\pi}\left(\frac{l-1}{2}\right)!}{l!} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{2p-1}{2}\right) = \frac{(-1)^p 2^{2p-1}\sqrt{\pi}(p-1)!}{(2p-1)!}$$

$$T(r,\theta) = T_0 \sum_{p=0}^{p=+\infty} (-1)^p \frac{(2p)!(4p+3)}{2^{2p}(p!)^2 2(p+1)} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p+1} P_{2p+1}(Cos(\theta))$$

Et l'on retrouve bien le résultat pour le cas à 3 dimensions.

Le résultat est donc que pour une hypersphère à température inversée, de part et d'autre de son « équateur » , il vient :

$$\lambda = \frac{n-1}{2} \quad \Rightarrow T(r,\theta) = T_0 \frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{p=+\infty} \frac{2^{2p+1}(2p+1+\lambda)\Gamma(p+\lambda+1)}{\Gamma(2p+2+2\lambda)\Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right)} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p+1} C_{2p+1}^{\lambda}(Cos(\theta)).$$

Remarque : c'est aussi la solution du problème d'une hémisphère à n dimensions dont la base est porté à une température nulle (condition homogène de Dirichlet), et la surface à la température T_0

Au passage donnons rapidement la solution pour un hémisphère supérieur portée à la température T_1 et l'hémisphère inférieur à la température T_2. Dans ce cas :

$$f^+(z) = \frac{T_1+T_2}{2} \quad f^-(z) = \begin{cases} \frac{T_1-T_2}{2} & z \in [0,1] \\ -\frac{T_1-T_2}{2} & z \in [-1,0] \end{cases}$$

Ce qui par principe de superposition donne immédiatement la solution :

$$\lambda = \frac{n-1}{2}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta) = \frac{T_1+T_2}{2} + \left(\frac{T_1-T_2}{2}\right) \frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{p=+\infty} \frac{2^{2p+1}(2p+1+\lambda)\Gamma(p+\lambda+1)}{\Gamma(2p+2+2\lambda)\Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right)} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p+1} C_{2p+1}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$\Rightarrow T(r,\theta) = \frac{T_1+T_2}{2} + (T_1-T_2) \frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{p=+\infty} \frac{2^{2p}(2p+1+\lambda)\Gamma(p+\lambda+1)}{\Gamma(2p+2+2\lambda)\Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right)} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p+1} C_{2p+1}^{\lambda}(Cos(\theta)).$$

Problème aux limites extérieur sur une hypersphère soumise à des conditions aux limites inhomogènes de Dirichlet dépendante uniquement de l'angle ϑ_n.

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad C.L. \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f(\theta)$$

$$T(r,\theta)\big| / \vec{\mathbf{x}}\in\Omega_n \quad \Omega_n=\left\{\vec{\mathbf{x}} / \sqrt{\sum_{l=1}^{n}x_l^2}\geq l_r\right\}$$

L'application de la condition de finitude de la solution (à l'infini ici), de la condition aux limites, ainsi que les conditions d'orthogonalité des fonctions de Gegenbauer donnent immédiatement la solution du problème aux limites, selon des calculs tout à fait similaire, en séparant la fonction limite en une fonction paire et impaire de z, et en tirant partie des conditions de parité des polynômes de Gegenbauer :

$$f(\theta)=\frac{f(\theta)+f(\pi-\theta)}{2}+\frac{f(\theta)-f(\pi-\theta)}{2}\Leftrightarrow f(z)=\frac{f(z)+f(-z)}{2}+\frac{f(z)-f(-z)}{2}$$

$$f^+(z)=\frac{f(z)+f(-z)}{2} \quad f^-(z)=\frac{f(z)-f(-z)}{2}$$

.

Il vient :

$$A_l^+=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_l^+(z)C_l^\lambda(z) \quad A_l^-=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_l^-(z)C_l^\lambda(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi}\left(\begin{array}{l}\sum_{p=0}^{p=+\infty}A_{2p}^+\frac{(2p)!(2p+\lambda)}{\Gamma(2p+2\lambda)}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2p+2\lambda}C_{2p}^\lambda(Cos(\theta))+\\ +\sum_{p=0}^{p=+\infty}A_{2p+1}^-\frac{(2p+1)!(2p+1+\lambda)}{\Gamma(2p+1+2\lambda)}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2p+1+2\lambda}C_{2p+1}^\lambda(Cos(\theta))\end{array}\right).$$

Plus particulièrement pour une hypersphère à température inversée, de part et d'autre de son « équateur » , il vient pour la solution extérieure :

$$\lambda=\frac{n-1}{2} \quad \Rightarrow T(r,\theta)=T_0\frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}}\sum_{p=0}^{p=+\infty}\frac{2^{2p+1}(2p+1+\lambda)\Gamma(p+\lambda+1)}{\Gamma(2p+2+2\lambda)\Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right)}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2p+1+2\lambda}C_{2p+1}^\lambda(Cos(\theta))$$

.

Remarque : c'est aussi la solution du problème extérieur d'une hémisphère à n dimensions dont la base est porté à une température nulle (condition homogène de Dirichlet), et la surface à la température T_0. Donnons rapidement la solution pour un hémisphère supérieur portée à la température T_1 et l'hémisphère inférieur à la température T_2 qui principe de superposition donne immédiatement la solution :

$$\lambda=\frac{n-1}{2} \quad \Rightarrow T(r,\theta)=\frac{T_1+T_2}{2}+\left(\frac{T_1-T_2}{2}\right)\frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}}\sum_{p=0}^{p=+\infty}\frac{2^{2p+1}(2p+1+\lambda)\Gamma(p+\lambda+1)}{\Gamma(2p+2+2\lambda)\Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right)}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2p+1+2\lambda}C_{2p+1}^\lambda(Cos(\theta))$$

ou bien

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{T_1+T_2}{2}+(T_1-T_2)\frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}}\sum_{p=0}^{p=+\infty}\frac{2^{2p}(2p+1+\lambda)\Gamma(p+\lambda+1)}{\Gamma(2p+2+2\lambda)\Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right)}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2p+1+2\lambda}C_{2p+1}^\lambda(Cos(\theta))$$

.

Application à un problème d'électrostatique à N-dimensions *: on aborde maintenant un problème d'électrostatique afin d'illustrer un résultat de la méthode des images électriques à N-dimensions. Soit une charge électrique placée au dessus de l'origine de l'hypersphère sur l'axe x_1 à la distance b. Quel est le potentiel électrostatique à l'intérieur et à l'extérieur de l'hypersphère ? Pour cela donnons le potentiel électrostatique à n-dimensions de cette charge, en fonction de l'angle ϑ_n . Par la suite on omet l'indice dimensionnel de l'angle.*

La sphère étant conductrice, la charge induit une répartition de charges opposées sur la surface de la sphère. Cette dernière se trouve alors placée au potentiel nul sur la surface de la sphère. Quel est le potentiel à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère n-dimensionnelle chargée. Or comme nous l'avons vu dans le cas tridimensionnel, l'équation à l'intérieur de la sphère est une équation de Poisson avec un terme source constitué par la charge électrique, tandis qu'à l'extérieur c'est une équation de Laplace (sans terme source). Le principe du maximum et du minimum s'applique à l'extérieur mais pas à l'intérieur. C'est la raison pour laquelle le potentiel à l'intérieur n'est pas identiquement nul tandis que celui à l'extérieur doit l'être nécessairement. Le potentiel n-dimensionnel créé par la charge électrique est de la forme (q est pris comme une constante de proportionnalité et ne représente pas exactement la charge, il comprend également des coefficients géométrique n-dimensionnel) :

$$T(r,\theta)=\frac{q}{\left\|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{x}}'\right\|^{n-2}}=\frac{q}{\left\|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{x}}'\right\|^{2\lambda}}=\frac{q}{\left(r^2+r'^2-2\vec{\mathbf{x}}.\vec{\mathbf{x}}'\right)^{\lambda}}$$

$$\vec{\mathbf{x}}'\ \textit{position de la charge}\ \vec{\mathbf{x}}'=(b,0,0,\cdots,0)\Rightarrow \vec{\mathbf{x}}.\vec{\mathbf{x}}'=rbCos(\theta_n)\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{q}{\left(r^2+b^2-2rbCos(\theta_n)\right)^{\lambda}}$$

On peut transformer la fonction génératrice en une formule permettant d'expliciter l'inverse de la distance en coordonnées hyper-sphériques entre deux points sous la forme d'une série des fonctions propres angulaires (les fonctions de Gegenbauer) :

$$\textit{Fonction génératrice}\ \frac{1}{\left(1+t^2-2tz\right)^{\lambda}}=\sum_{l=1}^{\infty}t^l C_l^{\lambda}(z)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\left(r^2+b^2-2rbCos(\theta_n)\right)^{\lambda}}=\frac{1}{r^{2\lambda}}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{b}{r}\right)^2-2\frac{b}{r}Cos(\theta_n)\right)^{\lambda}}=\frac{1}{r^{2\lambda}}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{b}{r}\right)^l C_l^{\lambda}\left(Cos(\theta_n)\right)$$

$$\textit{A la surface}\ r=l_r\quad \frac{1}{\left(l_r^{\,2}+b^2-2l_r bCos(\theta_n)\right)^{\lambda}}=\frac{1}{l_r^{\,2\lambda}}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{b}{l_r}\right)^l C_l^{\lambda}\left(Cos(\theta_n)\right)$$

Afin de ramener les deux problèmes à un problème de Laplace, on tire parti du potentiel à la surface, et l'on recherche les solutions des problèmes intérieur (Poisson) et extérieur (Laplace) sous la forme de l'addition du potentiel de la charge électrique et d'un potentiel U(r,ϑ). De cette façon le nouveau potentiel U(r,ϑ)devient solution d'un problème strictement de Laplace :

$$T(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2r\,bCos(\theta)}}+U(r,\theta)$$

Pour les deux problèmes de Laplace, il vient les solutions :

$$Problème\ Intérieur \quad U(r,\theta)=\sum_{l=0,+\infty} A_l\left(\frac{r}{l_r}\right)^l C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right)$$

$$U(r,\theta)\big|_{r=l_r} = -\frac{q}{\left(l_r^{\,2}+l_r^{\,2}-2l_r bCos(\theta_n)\right)^\lambda} = -\frac{q}{l_r^{\,2\lambda}}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{b}{l_r}\right)^l C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right)$$

$$\Rightarrow A_n=-\frac{q}{l_r^{\,2\lambda}}\left(\frac{b}{l_r}\right)^l \Rightarrow U(r,\theta)=-\frac{q}{l_r^{\,2\lambda}}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{br}{l_r^{\,2}}\right)^l C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right)$$

$$T(r,\theta)=\frac{q}{\left(l_r^{\,2}+l_r^{\,2}-2l_r bCos(\theta_n)\right)^\lambda}-\frac{q}{l_r^{\,2\lambda}}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{br}{l_r^{\,2}}\right)^l C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right)$$

$$Problème\ Extérieur \quad U(r,\theta)=\sum_{l=0,+\infty} B_l\left(\frac{l_r}{r}\right)^{l+2\lambda} C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right) \quad U(r,\theta)\big|_{r=l_r} = -\frac{q}{l_r^{\,2\lambda}}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{b}{l_r}\right)^l C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right)$$

$$\Rightarrow B_n=-\frac{q}{l_r^{\,2\lambda}}\left(\frac{b}{l_r}\right)^l \Rightarrow U(r,\theta)=-\frac{q}{l_r^{\,2\lambda}}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{b}{l_r}\right)^l\left(\frac{l_r}{r}\right)^{l+2\lambda} C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right)=-\frac{q}{r^{2\lambda}}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{b}{r}\right)^l C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right)$$

$$T(r,\theta)=\frac{q}{\left(l_r^{\,2}+l_r^{\,2}-2l_r bCos(\theta_n)\right)^\lambda}-\frac{q}{r^{2\lambda}}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{b}{r}\right)^l C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right)$$

Les séries peuvent se simplifier en effet :

$$Problème\ Intérieur \quad T_{int}(r,\theta)=\frac{q}{\left(l_r^{\,2}+l_r^{\,2}-2l_r bCos(\theta_n)\right)^\lambda}-\frac{q}{l_r^{\,2\lambda}}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{br}{l_r^{\,2}}\right)^l C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right)$$

$$Problème\ Extérieur \quad T_{ext}(r,\theta)=\frac{q}{\left(l_r^{\,2}+l_r^{\,2}-2l_r bCos(\theta_n)\right)^\lambda}-\frac{q}{r^{2\lambda}}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{b}{r}\right)^l C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right)$$

$$D(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{x}}')=\frac{1}{\left(x^2+x'^2-2xx'Cos(\theta_n)\right)^\lambda}=\frac{1}{x^{2\lambda}}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{x'}{x}\right)^l C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right)$$

$$Si\ x\to l_r \quad x'\to\frac{br}{l_r}\Rightarrow D(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{x}}')=\frac{1}{l_r^{\,2\lambda}}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{br}{l_r^{\,2}}\right)^l C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right)=\frac{1}{\left(l_r^{\,2}+\left(\frac{br}{l_r}\right)^2-2brCos(\theta)\right)^\lambda}$$

$$Si\ x\to r \quad x'\to b\Rightarrow D(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{x}}')=\frac{1}{r^{2\lambda}}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{b}{r}\right)^l C_l^\lambda\left(Cos(\theta_n)\right)=\frac{1}{\left(r^2+b^2-2rbCos(\theta)\right)^\lambda}$$

$$\Rightarrow T_{int}(r,\theta)=\frac{q}{\left(r^2+b^2-2rbCos(\theta_n)\right)^\lambda}-\frac{q}{\left(l_r^{\,2}+\left(\frac{br}{l_r}\right)^2-2brCos(\theta)\right)^\lambda}$$

$$T_{int}(r,\theta)=\frac{q}{\left(r^2+b^2-2rbCos(\theta_n)\right)^\lambda}-q\left(\frac{l_r}{b}\right)^{2\lambda}\frac{1}{\left(r^2+\left(\frac{l_r^{\,2}}{b}\right)^2-2r\frac{l_r^{\,2}}{b}Cos(\theta)\right)^\lambda}$$

$$\Rightarrow T_{ext}(r,\theta)=\frac{q}{\left(r^2+b^2-2rbCos(\theta_n)\right)^\lambda}-\frac{q}{\left(r^2+b^2-2rbCos(\theta_n)\right)^\lambda}=0$$

.

On retrouve bien le fait que le potentiel à l'extérieur est nul du fait des conditions aux limites nulles du problème (Laplace, principe du maximum et du minimum). On retrouve pour le problème intérieur la solution donnée à l'aide de la méthode de images électriques pour une hypersphère conductrice, soit un dipôle constitué par la charge électrique de départ placée à la distance b et une charge de signe opposé placée sur le même axe à la distance l_r^2/b du centre de la sphère et de charge $-q(l_r/b)^{2\lambda}$.

L'équation de Laplace en coordonnées hyper-sphériques :

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial T(r,\vartheta_n)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{Sin^{n-2}(\vartheta_n)}\frac{\partial}{\partial\vartheta_n}\left(Sin^{n-2}(\vartheta_n)\frac{\partial T(r,\vartheta_n)}{\partial\vartheta_n}\right)=0$$

est en effet invariante par la transformation $r'\to l_r^2/r$:

$$Si\ T(r,\vartheta_n)\ solution\ de\ \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial T(r,\vartheta_n)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{Sin^{n-2}(\vartheta_n)}\frac{\partial}{\partial\vartheta_n}\left(Sin^{n-2}(\vartheta_n)\frac{\partial T(r,\vartheta_n)}{\partial\vartheta_n}\right)=0$$

$$Alors\ U(r,\vartheta_n)=\left(\frac{l_r}{r}\right)^{n-2}T\left(\frac{l_r^2}{r},\vartheta_n\right)est\ également\ solution\ \Delta_n U(r',\vartheta_n)=\Delta_{n,r'}U(r',\vartheta_n)+\Delta_{n,\theta_n}U(r',\vartheta_n)=0$$

$$Notons\ \Delta_n=\Delta_{n,r}+\Delta_{n,\theta_n}\quad sachant\ que\ \Delta T(r',\vartheta_n)=\Delta_{r'}T(r',\vartheta_n)+\Delta_{n,\theta_n}T(r',\vartheta_n)=0$$

$$Posons\ r'=\frac{l_r^2}{r}\Leftrightarrow r=\frac{l_r^2}{r'}\quad \frac{dr'}{dr}=-\frac{l_r^2}{r^2}$$

Il vient

$$\frac{1}{r}\left[r\frac{\partial^2 T(r,\vartheta_n)}{\partial r^2}+(n-1)\frac{\partial T(r,\vartheta_n)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{1}{Sin^{n-2}(\vartheta_n)}\frac{\partial}{\partial\vartheta_n}\left(Sin^{n-2}(\vartheta_n)\frac{\partial T(r,\vartheta_n)}{\partial\vartheta_n}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{r'}{l_r}\right)^{n+2}\left[\frac{1}{r'}\left(r'\frac{\partial^2 U(r',\vartheta_n)}{\partial r^2}+(n-1)\frac{\partial U(r',\vartheta_n)}{\partial r'}\right)+\frac{1}{r'^2}\frac{1}{Sin^{n-2}(\vartheta_n)}\frac{\partial}{\partial\vartheta_n}\left(Sin^{n-2}(\vartheta_n)\frac{\partial U(r',\vartheta_n)}{\partial\vartheta_n}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{r'}{l_r}\right)^{n+2}\left[\Delta_{n,r'}U(r',\vartheta_n)+\Delta_{n,\theta_n}U(r',\vartheta_n)\right]=0\quad c.q.f.d.$$

Ce qui confirme le résultat de la construction de la solution à l'aide de la méthode des images en électrostatique.

<u>Solution des problèmes extérieur et intérieur électrostatiques N-Dimensionnel sur des corps géométrique de révolution connaissant la valeur du potentiel sur l'axe de révolution (inspiré du Jackson, Classical Electrodynamics)</u>

Dans le système de coordonnées déjà introduit :

$$r = \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = rCos(\vartheta_n) & \vartheta_n \in [0,\pi] \\ x_2 = rSin(\vartheta_n)Cos(\vartheta_{n-1}) & \vartheta_{n-1} \in [0,\pi] \\ x_3 = rSin(\vartheta_n)Sin(\vartheta_{n-1})Cos(\vartheta_{n-2}) & \vartheta_{n-2} \in [0,\pi] \\ \ldots \\ x_{n-1} = rSin(\vartheta_n)Sin(\vartheta_{n-1})\cdots Sin(\vartheta_3)Cos(\vartheta_2) & \vartheta_3 \in [0,\pi] \\ x_n = rSin(\vartheta_n)Sin(\vartheta_{n-1})\cdots Sin(\vartheta_3)Sin(\vartheta_2) & \vartheta_2 = \varphi \in [0,2\pi] \end{cases}$$

$$\vartheta_2 = \varphi \rightarrow hyperlongitude \qquad \vartheta_n, \vartheta_{n-1}, \cdots \vartheta_3 \rightarrow hypercolatitude$$

Les problèmes aux limites ne dépendent que des variables r et ϑ_n, que l'on notera ϑ pour simplifier
Ici l'axe x1 est un axe de révolution du problème aux limites, on le notera z comme dans le cas à 3 dimensions :

$$x_1 = z = rCos(\vartheta) \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 0 & \vartheta = 0 \\ x_1 < 0 & \vartheta = \pi \end{cases}$$

Connaissant la valeur sur l'axe de révolution, en notant la valeur z=r, et si l'on peut développer cette solution en puissance (ou inverse des puissances) de r selon les limites du domaine borné et le problème intérieur et extérieur, comme suit :

$$Problème\ Intérieur \quad T(z=r) = \sum_{l=0,+\infty} A_l \left(\frac{r}{l_r}\right)^l \quad r < l_r \quad Problème\ Extérieur \quad T(z=r) = \sum_{l=0,+\infty} B_l \left(\frac{l_r}{r}\right)^{l+2\lambda} \quad r > l_r$$

Alors les solutions des problèmes intérieur et extérieur dans tous l'espace deviennent :

$$Problème\ Intérieur \quad T(r,\theta) = \sum_{l=0,+\infty} A_l \left(\frac{r}{l_r}\right)^l C_l^\lambda(Cos(\theta)) \quad r < l_r \quad Problème\ Extérieur \quad T(r,\theta) = \sum_{l=0,+\infty} B_l \left(\frac{l_r}{r}\right)^{l+2\lambda} C_l^\lambda(Cos(\theta)) \quad r > l_r$$

Pour résoudre certains de ces problèmes on fera appel à la fonction génératrice des polynômes de Gegenbauer :

$$Fonction\ génératrice \quad \frac{1}{(1+w^2-2wz)^\lambda} = \sum_{l=0}^{\infty} w^l C_l^\lambda(z) \quad z = 0 \Rightarrow \frac{1}{(1+w^2)^\lambda} = \sum_{l=0}^{\infty} w^l C_l^\lambda(0) = \sum_{2l=0}^{\infty} w^{2l} C_{2l}^\lambda(0)$$

Considération sur l'électrostatique à N-Dimensions

On sait que le potentiel crée par une charge q0 concentrée en un point x' dans un espace à N-dimension est solution de l'équation de poisson, et possède la forme suivante dans tout l'espace en un point x :

$$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \quad \mathbf{x}' = (x_1', ..., x_n') \quad \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -q_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$G(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}') = q_0 \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'\|^{n-2}} \quad si\ n \geq 3 \quad n = 3 \Rightarrow G(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}') = \frac{q_0}{4\pi\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'\|^{n-2}}$$

Il s'agit également de la fonction de Green dans tout l'espace Rn. Pour obtenir le potentiel d'une répartition de charges telles que définie par une densité volumique dans un domaine fermé Ω, il suffit d'intégrer sur des volumes infinitésimaux du domaine Ω :

$$Densité\ \rho(\vec{\mathbf{x}}') \quad \vec{\mathbf{x}}' \in \Omega \quad q_0 = \rho(\vec{\mathbf{x}}')dV_\Omega \Rightarrow T(\vec{\mathbf{x}}) = \int_{\vec{\mathbf{x}}' \in \Omega} \rho(\vec{\mathbf{x}}')dV_\Omega \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{n/2}(n-2)\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'\|^{n-2}}$$

$$\Rightarrow T(\vec{\mathbf{x}}) = \frac{1}{S(n,1)(n-2)} \int_{\vec{\mathbf{x}}' \in \Omega} dV_\Omega \frac{\rho(\vec{\mathbf{x}}')}{\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'\|^{n-2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int_{\vec{\mathbf{x}}' \in \Omega} dV_\Omega \frac{\rho(\vec{\mathbf{x}}')}{\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'\|^{n-2}} \quad sachant\ que \quad S(n,1) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$S(n,1) \quad Surface\ de\ l'hyper-sphère\ de\ rayon\ unité\ en\ dimension\ n$$

$$S(n,l) \quad Surface\ de\ l'hyper-sphère\ de\ rayon\ l\ en\ dimension\ n \Rightarrow S(n,l) = \frac{2\pi^{n/2} l^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

L'électrostatique à N-dimensions suit donc les mêmes règles que celle à 3 dimensions. Dès lors pour calculer le potentiel d'un solide quelconque chargé avec une densité volumique donnée, il suffit d'intégrer les potentiels élémentaires crées par chaque charge contenue dans un volume infinitésimal.

Transformation de Kelvin, inversion sur une hyper-sphère de rayon lr

La transformation suivante consiste en une inversion des coordonnées :

$$\vec{\mathbf{x}}' = (x_1', ..., x_n') \quad \vec{\mathbf{x}} = (x_1, ..., x_n) \quad tq \quad \vec{\mathbf{x}}' = \frac{l_r^2 \vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2} \Rightarrow \|\vec{\mathbf{x}}'\|^2 = \frac{l_r^4}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{x}} = \frac{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 \vec{\mathbf{x}}'}{l_r^2} = \frac{l_r^2 \vec{\mathbf{x}}'}{\|\vec{\mathbf{x}}'\|^2}$$

Si une fonction est harmonique dans un domaine D de Rn (ne contenant pas l'origine des coordonées), alors la fonction dîtes transformée de Kelvin suivante est également harmonique dans le domaine D' transformée par l'inversion :

$$T(\vec{\mathbf{x}}) \quad tq \quad \Delta T(\vec{\mathbf{x}}) = 0 \quad \vec{\mathbf{x}} \in D \Rightarrow T'(\vec{\mathbf{x}}') = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}'\|^{n-2}} T(\vec{\mathbf{x}}) \quad tq \quad \Delta T'(\vec{\mathbf{x}}') = 0 \Rightarrow T'(\vec{\mathbf{x}}') = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}'\|^{n-2}} T\left(\frac{l_r^2 \vec{\mathbf{x}}'}{\|\vec{\mathbf{x}}'\|^2}\right).$$

Exemple : Problème extérieur, filament fin de longueur 2l placé sur l'axe x_1 avec une densité linéique de charge q, potentiel dans tout l'espace, application de la construction précédente :

Le domaine d'intégration correspondant au filament fin s'écrit : $\Omega = \{x_1 \in [-l,+l]\} \times \{x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0\}$

Le potentiel le long de l'axe x1 s'écrit sous forme intégrale, et le calcul de sa valeur sur l'axe x1 lorsque |x1|>l est aisée :

$$\vec{\mathbf{x}}' \in \Omega \quad \Rightarrow T(\vec{\mathbf{x}}) = \frac{\rho}{(n-2)S(n,1)} \int_{\vec{\mathbf{x}}' \in \Omega} dV_\Omega \frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'\|^{n-2}} \quad \vec{\mathbf{x}} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \quad \vec{\mathbf{x}}' = \{z, 0, \cdots, 0\}$$

$$\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'\|^{n-2} = \left((x_1 - z)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{n-2}{2}} \Rightarrow T(\vec{\mathbf{x}}) = \frac{\rho}{(n-2)S(n,1)} \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{\left((x_1 - z)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

$$\lambda = \frac{n-2}{2} \Rightarrow T(x_1, 0, \cdots, 0) = \frac{\rho}{(n-2)S(n,1)} \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{|x_1 - z|^{n-2}} = \frac{\rho}{2\lambda S(n,1)} \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{|x_1 - z|^{2\lambda}}$$

$$\text{Prenons} \quad x_1 > l \Rightarrow T(x_1, 0, \cdots, 0) = \frac{\rho}{2\lambda S(n,1)(2\lambda - 1)} \left(\frac{1}{(x_1 - l)^{2\lambda - 1}} - \frac{1}{(x_1 + l)^{2\lambda - 1}} \right) = \frac{\rho}{2\lambda S(n,1)(2\lambda - 1) x_1^{2\lambda - 1}} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{l}{x_1}\right)^{2\lambda - 1}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{x_1}\right)^{2\lambda - 1}} \right)$$

$$\text{Or} \quad \frac{1}{(1-x)^\alpha} = \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow T(x_1, 0, \cdots, 0) = \frac{\rho}{\lambda S(n,1)(2\lambda - 1) x_1^{2\lambda - 1}} \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{\Gamma(2\lambda + 2k)}{\Gamma(2\lambda - 1)(2k+1)!} \left(\frac{l}{x_1}\right)^{2k+1}$$

$$\Rightarrow T(x_1, 0, \cdots, 0) = \frac{\rho}{\lambda S(n,1)(2\lambda - 1) l^{2\lambda - 1}} \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{\Gamma(2\lambda + 2k)}{\Gamma(2\lambda - 1)(2k+1)!} \left(\frac{l}{x_1}\right)^{2k+2\lambda}$$

$$\text{Cas particulier } \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow T(x_1, 0, 0) = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{|x_1 - z|} \Rightarrow x_1 > l \quad T(x_1, 0, 0) = \frac{\rho}{4\pi} Log\left(\frac{x_1 + l}{x_1 - l}\right) = \frac{\rho}{4\pi} \left\{ Log\left(1 + \frac{l}{x_1}\right) - Log\left(1 - \frac{l}{x_1}\right) \right\}$$

$$\Rightarrow x_1 > l \quad T(x_1, 0, 0) = \frac{\rho}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{l}{x_1}\right)^{2n+1}$$

$$\Rightarrow r > l \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \quad T(r, \theta) = \frac{\rho}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^{\frac{1}{2}}(Cos(\theta))}{2n+1} \left(\frac{l}{r}\right)^{2n+1} = \frac{\rho}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_{2n}(Cos(\vartheta))}{2n+1} \left(\frac{l}{r}\right)^{2n+1} \\ T(r, \theta) = \frac{\rho}{\lambda S(2\lambda + 2, 1)(2\lambda - 1) l^{2\lambda - 1}} \sum_{k=0}^{k=+\infty} \left(\frac{l}{r}\right)^{2k+2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda + 2k)}{\Gamma(2\lambda - 1)(2k+1)!} C_{2k}^{\lambda}(Cos(\theta)) \end{cases}$$

Pour le cas |x1|<l ou r<l, l'intégration directe est possible :

$$\vec{\mathbf{x}}'\in\Omega \quad \Rightarrow T(\vec{\mathbf{x}})=\frac{\rho}{(n-2)S(n,1)}\int_{\vec{\mathbf{x}}'\in\Omega} dV_\Omega \frac{1}{\left\|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{x}}'\right\|^{n-2}} \quad \vec{\mathbf{x}}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\} \quad \vec{\mathbf{x}}'=\{z,0,\cdots,0\}$$

$$\left\|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{x}}'\right\|^{n-2}=\left((x_1-z)^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2\right)^{\frac{n-2}{2}} \Rightarrow T(\vec{\mathbf{x}})=\frac{\rho}{(n-2)S(n,1)}\int_{-l}^{+l}\frac{dz}{\left((x_1-z)^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

$$Posons \quad r_\perp=\sqrt{x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2} \quad u=\frac{x_1-z}{r_\perp} \quad \lambda=\frac{n-2}{2} \Rightarrow T(\vec{\mathbf{x}})=\frac{\rho}{(n-2)S(n,1)}\frac{1}{r_\perp{}^{n-3}}\int_{-l}^{+l}\frac{\frac{dz}{r_\perp}}{\left(1+\frac{(x_1-z)^2}{r_\perp{}^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

$$\Rightarrow T(\vec{\mathbf{x}})=\frac{\rho}{(n-2)S(n,1)}\frac{1}{r_\perp{}^{n-3}}\int_{\frac{x_1-l}{r_\perp}}^{\frac{x_1+l}{r_\perp}}\frac{du}{\left(1+u^2\right)^\lambda} \qquad Or \quad \int\frac{du}{\left(1+u^2\right)^\lambda}=u\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};-u^2\right)$$

$$\Rightarrow T(\vec{\mathbf{x}})=\frac{\rho}{(n-2)S(n,1)}\frac{1}{r_\perp{}^{n-3}}\left[u\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};-u^2\right)\right]_{\frac{x_1-l}{r_\perp}}^{\frac{x_1+l}{r_\perp}}$$

$$\Rightarrow T(\vec{\mathbf{x}})=\frac{\rho}{(n-2)S(n,1)}\frac{1}{r_\perp{}^{n-2}}\left\{(x_1+l)\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};-\frac{(x_1+l)^2}{r_\perp{}^2}\right)-(x_1-l)\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};-\frac{(x_1-l)^2}{r_\perp{}^2}\right)\right\}$$

Lorsque N=4:

$$r>l \quad et \quad S(4,1)=2\pi^2 \Rightarrow T(r,\vartheta)=\frac{\rho}{2\pi^2 l}\sum_{k=0}^{k=+\infty}\left(\frac{l}{r}\right)^{2k+2}\frac{\Gamma(2+2k)}{(2k+1)!}C_{2k}^{\lambda}(Cos(\theta))=\frac{\rho}{2\pi^2 l}\sum_{k=0}^{k=+\infty}\left(\frac{l}{r}\right)^{2k+2}C_{2k}^{1}(Cos(\theta)).$$

Pour les puissances supérieures l'expression littérale avec les fonctions hyper-géométriques permet de retrouver les valeurs sur l'axe x1 lorsque x1>l par passage à la limite, à savoir :

$$\Rightarrow T(\vec{\mathbf{x}})=\frac{\rho}{2\lambda\, S(2\lambda+2,1)}\frac{1}{r_\perp{}^{2\lambda-1}}\left[u\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};-u^2\right)\right]_{\frac{x_1-l}{r_\perp}}^{\frac{x_1+l}{r_\perp}}=\frac{\rho}{2\lambda\, S(2\lambda+2,1)}\left[\frac{u}{r_\perp{}^{2\lambda}}\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};-\frac{u^2}{r_\perp{}^2}\right)\right]_{x_1-l}^{x_1+l}$$

$$Or \quad \frac{u}{r_\perp{}^{2\lambda}}\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};-\frac{u^2}{r_\perp{}^2}\right)\approx-\frac{1}{2\lambda-1}\frac{1}{u^{2\lambda-1}}+C(\lambda)r_\perp{}^{1-2\lambda}+O\left(r_\perp{}^2\right).$$

$$\Rightarrow T(x_1,0,\cdots,0)=\frac{\rho}{2\lambda\, S(2\lambda+2,1)(2\lambda-1)}\left[\frac{1}{u^{2\lambda-1}}\right]_{x_1+l}^{x_1-l}$$

On retrouve bien l'expression en passant à la limite $r_\downarrow$->0 avant l'intégration.

<u>Exemple : Problème extérieur, anneau fin de rayon la avec une densité de charge ρ constante, placé à l'origine des coordonnées sur l'hyper-plan (x_2,...,x_n) d'axe de révolution x1, potentiel dans tout l'espace, application de la construction précédente</u>

« L'anneau » de rayon l_a centré sur l'origine des coordonnées, avec x1 comme axe de révolution est défini comme suit :

$$\text{Anneau} \quad \sum_{l=2}^{l=n} {x_i}^2 = {l_a}^2 \quad \vec{\mathbf{x}} = (x_1,...,x_n) \Leftrightarrow \text{Surface de l'Hyper} - \text{Sphère de dimension } n-1 \text{ et de rayon } l_a \cdot$$

Tous les points sur « l'anneau » étant à égale distance d'un point sur l'axe x_1, il s'en suit que le terme de puissance inverse de la distance est constant et que l'on peut sortir de l'intégrale. Admettons que la densité est constante dans le volume. Il vient :

$$\vec{\mathbf{x}} = \{0, x_2, \cdots, x_n\} \quad \vec{\mathbf{x}}' = \{z = x_1, 0, \cdots, 0\} \quad {l_a}^2 = {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 \Rightarrow \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'\| = \sqrt{z^2 + {l_a}^2}$$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{\rho}{(n-2)S(n,1)\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'\|^{n-2}} \int_{\vec{\mathbf{x}}' \in \Omega} dV_\Omega = \frac{\rho\, S(n-1, l_a)}{(n-2)S(n,1)\left(z^2 + {l_a}^2\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

$$S(n-1, l_a) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} {l_a}^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = {l_a}^{n-2} S(n-1,1) \quad et \quad S(n,1) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Rightarrow T(z) = \frac{\rho S(n-1,1) {l_a}^{n-2}}{(n-2)S(n,1)\left(z^2 + {l_a}^2\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{\rho}{(n-2)} \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{{l_a}^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{\rho}{(n-2)} \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \frac{\frac{{l_a}^{n-2}}{z^{n-2}}}{\left(1 + \frac{{l_a}^2}{z^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

En utilisant la fonction génératrice, on écrira le potentiel sur l'axe z :

$$\lambda = \frac{n-2}{2} \quad T(z) = \frac{\rho}{(n-2)} \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z}{l_a}\right)^{2l} C_{2l}^{\lambda}(0) & z < l_a \\ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{l_a}{z}\right)^{2l+n-2} C_{2l}^{\lambda}(0) = \sum_{2l=0}^{\infty} \left(\frac{l_a}{z}\right)^{2l+2\lambda} C_{2l}^{\lambda}(0) & z > l_a \end{cases} .$$

Et par extension le potentiel dans tout l'espace :

$$\lambda = \frac{n-2}{2} \qquad T(r,\theta) = \frac{\rho}{(n-2)} \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{l_a}\right)^{2l} C_{2l}^{\lambda}(0) C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) & r < l_a \\ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{l_a}{r}\right)^{2l+2\lambda} C_{2l}^{\lambda}(0) C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) & r > l_a \end{cases}$$

On retrouve le potentiel d'un anneau fin à 3 dimensions : (dans une version précédente en coordonnées sphériques le potentiel était le même à un facteur multiplicatif 4π près).

$$n=3 \Rightarrow S(n-1,1)=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad et \quad S(n,1)=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Rightarrow \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{2}$$

$$\lambda=\frac{1}{2} \Rightarrow T(r,\theta)=\frac{\rho}{2}\begin{cases}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{l_a}\right)^{2l} P_{2l}(0)P_{2l}(Cos(\theta)) & r<l_a \\ \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{l_a}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(0)P_{2l}(Cos(\theta)) & r>l_a\end{cases}$$

<u>Exemple : Problème extérieur, anneau fin de rayon la avec une densité de charge ρ constante, placé à la distance z_a l'origine des coordonnées au dessus de l'hyper-plan (x2,...,xn) parfaitement conducteur d'axe de révolution x1, potentiel dans tout l'espace.</u>

De l'exemple précédent, on tire le potentiel du seul « anneau » placé en z=za :

$$T(z)=\frac{\rho}{(n-2)}\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\frac{l_a^{\,n-2}}{\left((z-z_a)^2+l_a^{\,2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}=\frac{\rho}{(n-2)}\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}=\frac{l_a^{\,n-2}}{\left(z^2+\left(\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}\right)^2-2zz_a\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

$$T(z)=\frac{\rho}{(n-2)}\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\frac{l_a^{\,n-2}}{\left(z_a^{\,2}+l_a^{\,2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}\begin{cases}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{z^2}{\left(\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}\right)^2}-2\dfrac{z_a}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\dfrac{z}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\right)^{\frac{n-2}{2}}} & z<\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}} \\ \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}{z}\right)^{n-2}}{\left(1+\dfrac{\left(\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}\right)^2}{z^2}-2\dfrac{z_a}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\dfrac{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}{z}\right)^{\frac{n-2}{2}}} & z>\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}\end{cases}.$$

$$\frac{1}{\left(1+w^2-2wt\right)^{\lambda}}=\sum_{l=0}^{\infty}w^l C_l^{\lambda}(t)\rightarrow\begin{cases}w=\dfrac{z}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}} \quad t=\dfrac{z_a}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}} & z<\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}} \\ w=\dfrac{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}{z} \quad t=\dfrac{z_a}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}} & z>\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}\end{cases} \quad \lambda=\frac{n-2}{2}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{\rho}{(n-2)}\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\frac{l_a^{\,n-2}}{\left(z_a^{\,2}+l_a^{\,2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}\begin{cases}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\dfrac{r}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\right)^{l} C_l^{\lambda}\left(\dfrac{z_a}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\right)C_l^{\lambda}(Cos(\theta)) & r<\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}} \\ \sum_{l=0}^{\infty}\left(\dfrac{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}{r}\right)^{l+2\lambda} C_l^{\lambda}\left(\dfrac{z_a}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\right)C_l^{\lambda}(Cos(\theta)) & r>\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}\end{cases}$$

Pour déduire le potentiel de cet anneau placé au dessus de l'hyper-plan parfaitement conducteur, on utilise la méthode des images électriques. Le potentiel est équivalent à celui de deux anneaux placés de part et d'autre du plan, à la même distance et de charges opposées. Compte tenu des propriétés de parité des polynômes de Gegenbauer, le potentiel aura donc immédiatement la forme :

$$T(r,\theta)=\frac{\rho}{(n-2)}\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\frac{l_a^{\,n-2}}{\left(z_a^{\,2}+l_a^{\,2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\right)^{l}\left\{C_l^{\lambda}\left(\frac{z_a}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\right)-C_l^{\lambda}\left(-\frac{z_a}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\right)\right\}C_l^{\lambda}(Cos(\theta)) & r<\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}{r}\right)^{l+2\lambda}\left\{C_l^{\lambda}\left(\frac{z_a}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\right)-C_l^{\lambda}\left(-\frac{z_a}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\right)\right\}C_l^{\lambda}(Cos(\theta)) & r>\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{2\rho}{(n-2)}\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\frac{l_a^{\,n-2}}{\left(z_a^{\,2}+l_a^{\,2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\right)^{2l+1}C_{2l+1}^{\lambda}\left(\frac{z_a}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\right)C_{2l+1}^{\lambda}(Cos(\theta)) & r<\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}{r}\right)^{2l+1+2\lambda}C_{2l+1}^{\lambda}\left(\frac{z_a}{\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}}\right)C_{2l+1}^{\lambda}(Cos(\theta)) & r>\sqrt{z_a^{\,2}+l_a^{\,2}}\end{cases}$$

<u>Exemple : Problème extérieur, anneau fin de rayon la, placé à l'origine avec une densité de charge ρ, potentiel dans tout l'espace, entourant une hyper-sphère conductrice de rayon ls, la>ls, de valeur nulle pour le potentiel à la surface de l'hyper-sphère</u>

Là encore la configuration des charges dans l'anneau ne se modifie pas en présence de l'hyper-sphère conductrice puisque la géométrie respecte la symétrie autour de l'axe de révolution. Le potentiel total est donc l'ajout du potentiel précédemment calculé de l'anneau avec un potentiel dit de surface tel que le potentiel résultant est nul sur l'hyper-sphère conductrice :

$$T(r,\theta)=T_a(r,\theta)+T_s(r,\theta)\quad l_s<l_a$$

$$\lambda=\frac{n-2}{2}\qquad T_a(r,\theta)=\frac{\rho}{(n-2)}\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{l_a}\right)^{2l}C_{2l}^{\lambda}(0)C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) & r<l_a\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{l_a}{r}\right)^{2l+2\lambda}C_{2l}^{\lambda}(0)C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) & r>l_a\end{cases}$$

$$T_s(r,\theta)\quad tq\quad T_s(r,\theta)\big|_{r=l_s}=-T_a(r,\theta)\big|_{r=l_s}=-\frac{\rho}{(n-2)}\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{l_s}{l_a}\right)^{2l}C_{2l}^{\lambda}(0)C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta))\quad puisque\quad l_s<l_a$$

$$\Rightarrow T_s(r,\theta)=-\frac{\rho}{(n-2)}\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{l_s}{l_a}\right)^{2l}\left(\frac{l_s}{r}\right)^{2l+2\lambda}C_{2l}^{\lambda}(0)C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{\rho}{(n-2)}\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{r}{l_a}\right)^{2l}-\left(\frac{l_s}{l_a}\right)^{2l}\left(\frac{l_s}{r}\right)^{2l+2\lambda}\right\}C_{2l}^{\lambda}(0)C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) & l_s<r<l_a\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{l_a}{r}\right)^{2l+2\lambda}-\left(\frac{l_s}{l_a}\right)^{2l}\left(\frac{l_s}{r}\right)^{2l+2\lambda}\right\}C_{2l}^{\lambda}(0)C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) & r>l_a\end{cases}$$

Remarque sur la méthode des images électriques (transformation de Kelvin)

La solution peut-être obtenue en utilisant la méthode des images électriques en plaçant fictivement un anneau inversé par rapport à l'hyper-sphère, chargé négativement de la charge de l'anneau initial multiplié par un coefficient de proportionnalité $\left(\frac{l_a}{l_s}\right)^{2\lambda}$. L'anneau transformé est situé à l'intérieur de l'hyper-sphère. Le rayon de l'anneau inverse est le suivant et déduisons son potentiel avec la nouvelle charge comme transformée de Kelvin :

$$\lambda = \frac{n-2}{2} \quad \vec{\mathbf{x}}' = \frac{l_s^{\,2}\vec{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|^2} \Rightarrow l_a'^2 = \frac{l_s^{\,4}}{l_a^{\,2}} \Rightarrow l_a' = \frac{l_s^{\,2}}{l_a}$$

$$\Rightarrow T_{a'}(r,\theta) = -\left(\frac{l_a}{l_s}\right)^{2\lambda} \frac{\rho}{(n-2)} \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{l_{a'}}{r}\right)^{2l+2\lambda} C_{2l}^{\lambda}(0) C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) \quad r > l_{a'}$$

$$\Rightarrow T_{a'}(r,\theta) = -\frac{\rho}{(n-2)} \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{l_s}{l_a}\right)^{2l} \left(\frac{l_s}{r}\right)^{2l+2\lambda} C_{2l}^{\lambda}(0) C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) \quad r > l_{a'}$$

On retrouve bien le potentiel additif pour obtenir la solution.

Exemple : problème intérieur, anneau fin de rayon la, centré à l'origine avec une densité de charge ρ, potentiel dans tout l'espace, à l'intérieur d'une hyper-sphère conductrice de rayon ls, la<ls, de valeur nulle pour le potentiel à la surface de l'hyper-sphère

Là encore la configuration des charges dans l'anneau ne se modifie pas en présence de l'hyper-sphère conductrice puisque la géométrie respecte la symétrie autour de l'axe de révolution. Le potentiel total est donc l'ajout du potentiel précédemment calculé de l'anneau avec un potentiel dit de surface tel que le potentiel résultant est nul sur l'hyper-sphère conductrice :

$$T(r,\theta) = T_a(r,\theta) + T_s(r,\theta) \quad l_a < l_s$$

$$\lambda = \frac{n-2}{2} \qquad T_a(r,\theta) = \frac{\rho}{(n-2)} \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{l_a}\right)^{2l} C_{2l}^{\lambda}(0) C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) & r < l_a \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{l_a}{r}\right)^{2l+2\lambda} C_{2l}^{\lambda}(0) C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) & r > l_a \end{cases}$$

$$T_s(r,\theta) \quad tq \quad T_s(r,\theta)\big|_{r=l_s} = -T_a(r,\theta)\big|_{r=l_s} = -\frac{\rho}{(n-2)} \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{l_a}{l_s}\right)^{2l+2\lambda} C_{2l}^{\lambda}(0) C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) \quad puisque \quad l_s < l_a$$

$$\Rightarrow T_s(r,\theta) = -\frac{\rho}{(n-2)} \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{l_a}{l_s}\right)^{2l+2\lambda} \left(\frac{r}{l_s}\right)^{2l} C_{2l}^{\lambda}(0) C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow T(r,\theta) = \frac{\rho}{(n-2)} \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r}{l_a}\right)^{2l} - \left(\frac{l_a}{l_s}\right)^{2l+2\lambda} \left(\frac{r}{l_s}\right)^{2l} \right\} C_{2l}^{\lambda}(0) C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) & r < l_a \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{l_a}{r}\right)^{2l+2\lambda} - \left(\frac{l_a}{l_s}\right)^{2l+2\lambda} \left(\frac{r}{l_s}\right)^{2l} \right\} C_{2l}^{\lambda}(0) C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) & l_a < r < l_s \end{cases}$$

<u>Remarque sur la méthode des images électriques (transformation de Kelvin)</u>

La solution peut-être obtenue en utilisant la méthode des images électriques en plaçant fictivement un anneau inversé par rapport à l'hyper-sphère, chargé négativement de la charge de l'anneau initial multiplié par un coefficient de proportionnalité $\left(\frac{l_a}{l_s}\right)^{2\lambda}$. L'anneau transformé est situé cette fois à l'extérieur de l'hyper-sphère. Le rayon de l'anneau inverse est le suivant et déduisons son potentiel avec la nouvelle charge comme transformée de Kelvin :

$$\lambda = \frac{n-2}{2} \quad \vec{\mathbf{x}}' = \frac{l_s^{\,2}\vec{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|^2} \Rightarrow l_a'^2 = \frac{l_s^{\,4}}{l_a^{\,2}} \Rightarrow l_a' = \frac{l_s^{\,2}}{l_a}$$

$$\Rightarrow T_{a'}(r,\theta) = -\left(\frac{l_a}{l_s}\right)^{2\lambda} \frac{\rho}{(n-2)} \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{l_{a'}}\right)^{2l} C_{2l}^{\lambda}(0) C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) \quad r < l_{a'}$$

$$\Rightarrow T_{a'}(r,\theta) = -\frac{\rho}{(n-2)} \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{l_a}{l_s}\right)^{2l+2\lambda} \left(\frac{r}{l_s}\right)^{2l} C_{2l}^{\lambda}(0) C_{2l}^{\lambda}(Cos(\theta)) \quad r < l_{a'}$$

On retrouve bien le potentiel additif pour obtenir la solution.

<u>Remarque importante : dans le cas d'une charge ponctuelle en dehors ou en dedans de l'hyper-sphère, le coefficient multiplicateur de la charge image est $(l_s/l_a)^{2\lambda}$ où la est le rayon position de la charge. Lorsque l'on a un anneau, il faut envisager l'intégration d'une charge ponctuelle sur la « surface » de l'anneau (une hyper-sphère de dimension n-1). La prise en compte de cette intégration donne immédiatement un coefficient multiplicateur de la charge image de valeur inverse, soit $(l_a/l_s)^{2\lambda}$.</u>

<u>Exemple : Problème extérieur, hyper-disque fin de rayon la avec une densité de charge ρ constante, placé à l'origine des coordonnées sur l'hyper-plan (x_2,...,x_n) d'axe de révolution x1, potentiel dans tout l'espace</u>

L'hyper-disque de rayon l_d centré sur l'origine des coordonnées est l'intérieur hyper-sphère de dimension n-1, avec x1 comme axe de révolution est défini comme suit :

$$Hyper-Disque \quad \sum_{l=2}^{l=n} x_i^2 \le l_d^2 \quad \vec{\mathbf{x}} = (x_1,...,x_n) \Leftrightarrow \textit{Intérieur de l'Hyper-Sphère de dimension } n-1 \textit{ et de rayon } l_d \cdot$$

Admettons que la densité est constante dans le volume. Tous les points du disque situés sur un même « rayon » intérieur sont à égale distance d'un point x1 de l'axe de révolution, il s'en suit que le potentiel créé par une fine couche de rayon r dans l'hyper-disque est celui de l'anneau multiplié par la différence de rayon dr (qui donne la charge totale). Le tout est intégré sur l'intervalle des valeur du rayon soit 0 à l_d. Il vient :

$$dT(x_1) = dr \frac{\rho S(n-1,1) r^{n-2}}{(n-2)S(n,1)\left(x_1^2 + r^2\right)^{\frac{n-2}{2}}} \Rightarrow T(x_1) = \frac{\rho S(n-1,1)}{(n-2)S(n,1)} \int_0^{l_d} dr \frac{r^{n-2}}{\left(x_1^2 + r^2\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

$$T(x_1) = \frac{\rho S(n-1,1)}{(n-2)S(n,1)} \int_0^{l_d} dr \frac{r^{2\lambda}}{\left(x_1^2 + r^2\right)^{\lambda}} \quad Or \quad \int dr \frac{r^{2\lambda}}{\left(x_1^2 + r^2\right)^{\lambda}} = \frac{r^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)x_1^{2\lambda}} \; {}_2F_1\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}; \lambda + \frac{3}{2}; -\frac{r^2}{x_1^2}\right).$$

$$Comme \quad \lim_{r \to 0} \frac{r^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)x_1^{2\lambda}} \; {}_2F_1\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}; \lambda + \frac{3}{2}; -\frac{r^2}{x_1^2}\right) = 0 \quad avec \quad \lambda > 0$$

$$\Rightarrow T(x_1) = \rho \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \frac{l_d}{2\lambda(2\lambda+1)} \left(\frac{l_d}{x_1}\right)^{2\lambda} \; {}_2F_1\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}; \lambda + \frac{3}{2}; -\left(\frac{l_d}{x_1}\right)^2\right)$$

On trouve immédiatement le développement pour x1>ld :

$$x_1 > l_d \Rightarrow T(x_1) = \rho \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \frac{l_d}{2\lambda(2\lambda+1)} \left(\frac{l_d}{x_1}\right)^{2\lambda} \; {}_2F_1\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}; \lambda + \frac{3}{2}; -\left(\frac{l_d}{x_1}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow T(x_1) = \rho \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \frac{l_d}{2\lambda(2\lambda+1)} \left(\frac{l_d}{x_1}\right)^{2\lambda} \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{\Gamma(\lambda+k)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2} + k\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{3}{2} + k\right) k!} (-1)^k \left(\frac{l_d}{x_1}\right)^{2k}.$$

$$\Rightarrow T(x_1) = \rho \frac{S(n-1,1)}{S(n,1)} \frac{l_d}{2\lambda\Gamma(\lambda)} \sum_{k=0}^{k=+\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\lambda+k)}{(2\lambda+1+2k)\, k!} \left(\frac{l_d}{x_1}\right)^{2k+2\lambda}$$

Le développement pour x1<ld est obtenu en utilisant une formule connue des fonctions hypergéométriques (voir M.Abramovitz.I.A.Stegu, Handbook of Mathematical Functions, HyperGeometric Functions, formule 15.3.7), à savoir :

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}(-z)^{-a} \; {}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}(-z)^{-b} \; {}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{z}\right).$$

$$\Rightarrow (-z)^a \; {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} {}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}(-z)^{a-b} \; {}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{z}\right)$$

Appliquons cette formule à notre cas, il vient :

$$a=\lambda \quad b=\lambda+\frac{1}{2} \quad c=\lambda+\frac{3}{2} \quad z=-\left(\frac{l_d}{x_1}\right)^2$$

$$\left(\frac{l_d}{x_1}\right)^{2\lambda} {}_2F_1\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2};\lambda+\frac{3}{2};-\left(\frac{l_d}{x_1}\right)^2\right)=(-z)^a {}_2F_1(a,b;c;z)$$

$$=(2\lambda+1){}_2F_1\left(\lambda,-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^2\right)+\frac{x_1}{l_d}\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)}{}_2F_1\left(\lambda+\frac{1}{2},0;\frac{1}{2};\frac{1}{z}\right)$$

$$=(2\lambda+1){}_2F_1\left(\lambda,-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^2\right)-\sqrt{\pi}\frac{x_1}{l_d}\frac{(2\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)}\Leftarrow {}_2F_1\left(\lambda+\frac{1}{2},0;\frac{1}{2};\frac{1}{z}\right)=1$$

Soit :

$$T(x_1)=\rho\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\frac{l_d}{2\lambda}\left\{{}_2F_1\left(\lambda,-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^2\right)-\sqrt{\pi}\frac{x_1}{l_d}\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right\}.$$

On retrouve l'expression pour un disque en 3 dimensions :

$$\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow T(x_1)=\rho\frac{2\pi}{S(3,1)}l_d\left\{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^2\right)-\frac{x_1}{l_d}\right\}\Leftarrow {}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^2\right)=\sqrt{1+\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^2}$$

$$T(x_1)=\rho\frac{2\pi}{S(3,1)}l_d\left\{\sqrt{1+\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^2}-\frac{x_1}{l_d}\right\}=\rho\frac{2\pi}{S(3,1)}l_d\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^2}+\frac{x_1}{l_d}}\right\}=\rho\frac{2\pi}{S(3,1)}\frac{l_d{}^2}{x_1+\sqrt{l_d{}^2+x_1{}^2}}$$

Développons en série hypergéométrique, il vient :

$$T(x_1)=\rho\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\frac{l_d}{2\lambda}\left\{-\sum_{k=0}^{k=+\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)(2k-1)k!}\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^{2k}-\sqrt{\pi}\frac{x_1}{l_d}\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right\}$$

$$T(x_1)=\rho\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\frac{l_d}{2\lambda\Gamma(\lambda)}\left\{-\sum_{k=0}^{k=+\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\lambda+k)}{(2k-1)k!}\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^{2k}-\sqrt{\pi}\frac{x_1}{l_d}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Résumons pour les deux positions sur l'axe x1 :

$$T(x_1)=\rho\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\frac{l_d}{2\lambda\Gamma(\lambda)}\times\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=+\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\lambda+k)}{(2\lambda+1+2k)\,k!}\left(\frac{l_d}{x_1}\right)^{2k+2\lambda} & x_1>l_d\\ \displaystyle-\sqrt{\pi}\frac{x_1}{l_d}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-\sum_{k=0}^{k=+\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\lambda+k)}{(2k-1)\,k!}\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^{2k} & x_1<l_d\end{cases}$$

$$\Rightarrow T(x_1)=\rho\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\frac{l_d}{2\lambda\Gamma(\lambda)}\times\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=+\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\lambda+k)}{(2\lambda+1+2k)\,k!}\left(\frac{l_d}{x_1}\right)^{2k+2\lambda} & x_1>l_d\\ \displaystyle\Gamma(\lambda)-\sqrt{\pi}\frac{x_1}{l_d}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=0}^{k=+\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{(2k+1)(k+1)!}\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^{2k+2} & x_1<l_d\end{cases}$$

Cela permet de trouver immédiatement le développement de la solution dans tout l'espace :

$$T(r,\vartheta)=\rho\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\frac{l_d}{2\lambda\Gamma(\lambda)}\times\begin{cases}\displaystyle\Gamma(\lambda)-\sqrt{\pi}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\frac{x_1}{l_d}C_1^{\lambda}(Cos(\theta))+\sum_{k=0}^{k=+\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{(2k+1)(k+1)!}\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^{2k+2}C_{2k+2}^{\lambda}(Cos(\theta)) & x_1<l_d\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=+\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\lambda+k)}{(2\lambda+1+2k)\,k!}\left(\frac{l_d}{x_1}\right)^{2k+2\lambda}C_{2k}^{\lambda}(Cos(\theta)) & x_1>l_d\end{cases}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta)=\rho\frac{S(n-1,1)}{S(n,1)}\frac{l_d}{2\lambda\Gamma(\lambda)}\times\begin{cases}\displaystyle\Gamma(\lambda)-\sqrt{\pi}\,2\lambda\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\frac{x_1}{l_d}Cos(\theta)+\sum_{k=0}^{k=+\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{(2k+1)(k+1)!}\left(\frac{x_1}{l_d}\right)^{2k+2}C_{2k+2}^{\lambda}(Cos(\theta)) & x_1<l_d\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=+\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\lambda+k)}{(2\lambda+1+2k)\,k!}\left(\frac{l_d}{x_1}\right)^{2k+2\lambda}C_{2k}^{\lambda}(Cos(\theta)) & x_1>l_d\end{cases}$$

Problème aux limites extérieur et intérieur sur une hypersphère soumise à des conditions aux limites inhomogènes de Robin dépendante uniquement de l'angle ϑ$_n$.

Soit le problème intérieur inhomogène mixte sur l'hyper-sphère suivant :

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad C.L. \quad \alpha\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r}+\beta\left(T(r,\theta)-T_{ext}(\theta)\right)\Big|_{r=l_r}=0 \quad T(r,\theta)\big/\vec{\mathbf{x}}\in\Omega_n \quad \Omega_n=\left\{\vec{\mathbf{x}}\Big/\sqrt{\sum_{l=1}^{n}x_l^2}\le l_r\right\}$$

La solution de ce problème s'écrit sous la forme d'un développement en série comme suit :

$$A^+_{2p}=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}T^+_{ext}(z)C^\lambda_{2p}(z) \quad A^-_{2p+1}=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}T^-_{ext}(z)C^\lambda_{2p+1}(z) \quad z=Cos(\theta)$$

$$T^+_{ext}(z)=\frac{T_{ext}(z)+T_{ext}(-z)}{2} \qquad T^-_{ext}(z)=\frac{T_{ext}(z)-T_{ext}(-z)}{2}$$

$$T(r,\theta)=\frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi}\left(\begin{array}{l}\sum_{p=0}^{p=+\infty}A^+_{2p}\frac{(2p)!(2p+\lambda)}{\Gamma(2p+2\lambda)}\left(\frac{l_r\beta}{2p\alpha+l_r\beta}\right)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p}C^\lambda_{2p}(Cos(\theta))+\\+\sum_{p=0}^{p=+\infty}A^-_{2p+1}\frac{(2p+1)!(2p+1+\lambda)}{\Gamma(2p+1+2\lambda)}\left(\frac{l_r\beta}{(2p+1)\alpha+l_r\beta}\right)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p+1}C^\lambda_{2p+1}(Cos(\theta))\end{array}\right)$$

Soit le problème extérieur inhomogène mixte sur l'hyper-sphère suivant :

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad C.L. \quad \alpha\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r}-\beta\left(T(r,\theta)-T_{ext}(\theta)\right)\Big|_{r=l_r}=0 \quad T(r,\theta)\big/\vec{\mathbf{x}}\in\Omega_n \quad \Omega_n=\left\{\vec{\mathbf{x}}\Big/\sqrt{\sum_{l=1}^{n}x_l^2}\ge l_r\right\}$$

La solution de ce problème s'écrit sous la forme d'un développement en série comme suit :

$$A^+_{2p}=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}T^+_{ext}(z)C^\lambda_{2p}(z) \quad A^-_{2p+1}=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}T^-_{ext}(z)C^\lambda_{2p+1}(z) \quad z=Cos(\theta)$$

$$T^+_{ext}(z)=\frac{T_{ext}(z)+T_{ext}(-z)}{2} \qquad T^-_{ext}(z)=\frac{T_{ext}(z)-T_{ext}(-z)}{2}$$

$$T(r,\theta)=\frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi}\left(\begin{array}{l}\sum_{p=0}^{p=+\infty}A^+_{2p}\frac{(2p)!(2p+\lambda)}{\Gamma(2p+2\lambda)}\left(\frac{l_r\beta}{2p\alpha+l_r\beta}\right)\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2p+2\lambda}C^\lambda_{2p}(Cos(\theta))+\\+\sum_{p=0}^{p=+\infty}A^-_{2p+1}\frac{(2p+1)!(2p+1+\lambda)}{\Gamma(2p+1+2\lambda)}\left(\frac{l_r\beta}{(2p+1)\alpha+l_r\beta}\right)\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2p+1+2\lambda}C^\lambda_{2p+1}(Cos(\theta))\end{array}\right)$$

Problème aux limites intérieur sur une hypersphère creuse soumise à des conditions aux limites inhomogènes de Robin dépendante uniquement de l'angle ϑ_n. De part et d'autre.

Soit le problème intérieur inhomogène mixte sur l'hyper-sphère suivant :

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\Big|/\vec{\mathbf{x}}\in\Omega_n \quad \Omega_n=\left\{\vec{\mathbf{x}}/l_{r1}\le\sqrt{\sum_{l=1}^{n}x_l^2}\le l_{r2}\right\}$$

$$C.L.\quad \alpha_1\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r}-\beta_1\left(T(r,\theta)-T_{\text{int}}(\theta)\right)\Big|_{r=l_{r1}}=0 \quad \alpha_2\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r}+\beta_2\left(T(r,\theta)-T_{ext}(\theta)\right)\Big|_{r=l_{r2}}=0$$

Par principe de superposition c'est la solution des deux sous-problèmes :

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\Big|/\vec{\mathbf{x}}\in\Omega_n \quad \Omega_n=\left\{\vec{\mathbf{x}}/l_{r1}\le\sqrt{\sum_{l=1}^{n}x_l^2}\le l_{r2}\right\}$$

$$C.L.\quad \alpha_1\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r}-\beta_1 T(r,\theta)\Big|_{r=l_{r1}}=0 \quad \alpha_2\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r}+\beta_2\left(T(r,\theta)-T_{ext}(\theta)\right)\Big|_{r=l_{r2}}=0$$

et

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\Big|/\vec{\mathbf{x}}\in\Omega_n \quad \Omega_n=\left\{\vec{\mathbf{x}}/l_{r1}\le\sqrt{\sum_{l=1}^{n}x_l^2}\le l_{r2}\right\}$$

$$C.L.\quad \alpha_1\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r}-\beta_1\left(T(r,\theta)-T_{\text{int}}(\theta)\right)\Big|_{r=l_{r1}}=0 \quad \alpha_2\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r}+\beta_2 T(r,\theta)\Big|_{r=l_{r2}}=0$$

Le premier sous-problème présente une fonction radiale plus complexe et une solution de la forme :

$$A^+_{2p}=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}T^+_{ext}(z)C^\lambda_{2p}(z) \quad A^-_{2p+1}=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}T^-_{ext}(z)C^\lambda_{2p+1}(z) \quad z=Cos(\theta)$$

$$T^+_{ext}(z)=\frac{T_{ext}(z)+T_{ext}(-z)}{2} \qquad T^-_{ext}(z)=\frac{T_{ext}(z)-T_{ext}(-z)}{2}$$

$$R_p(r)=\frac{l_{r1}}{p\alpha_1-\beta_1 l_{r1}}\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^p+\frac{l_{r1}}{(p+2\lambda)\alpha_1+\beta_1 l_{r1}}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{p+2\lambda}$$

$$D_p=\beta_2\left[\frac{\alpha_2 l_{r1}}{l_{r2}}\left(\frac{p}{p\alpha_1-\beta_1 l_{r1}}\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^p-\frac{(p+2\lambda)}{(p+2\lambda)\alpha_1+\beta_1 l_{r1}}\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{p+2\lambda}\right)+\beta_2 R_p(l_{r2})\right]^{-1}$$

$$T_1(r,\theta)=\frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi}\left(\begin{array}{l}\sum_{p=0}^{p=+\infty}A^+_{2p}\frac{(2p)!(2p+\lambda)}{\Gamma(2p+2\lambda)}D_{2p}R_{2p}(r)C^\lambda_{2p}(Cos(\theta))+\\+\sum_{p=0}^{p=+\infty}A^-_{2p+1}\frac{(2p+1)!(2p+1+\lambda)}{\Gamma(2p+1+2\lambda)}D_{2p+1}R_{2p+1}(r)C^\lambda_{2p+1}(Cos(\theta))\end{array}\right)$$

Le second sous-problème présente également une fonction radiale plus complexe et la solution de suivante :

$$B_{2p}^{+}=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}T_{\mathrm{int}}^{+}(z)C_{2p}^{\lambda}(z)\quad B_{2p+1}^{-}=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}T_{\mathrm{int}}^{-}(z)C_{2p+1}^{\lambda}(z)\quad z=Cos(\theta)$$

$$T_{\mathrm{int}}^{+}(z)=\frac{T_{\mathrm{int}}(z)+T_{\mathrm{int}}(-z)}{2}\qquad T_{\mathrm{int}}^{-}(z)=\frac{T_{\mathrm{int}}(z)-T_{\mathrm{int}}(-z)}{2}$$

$$S_p(r)=\frac{l_{r2}}{p\alpha_2+\beta_2 l_{r2}}\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{p}+\frac{l_{r2}}{(p+2\lambda)\alpha_2-\beta_2 l_{r2}}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{p+2\lambda}$$

$$G_p=\beta_1\left[\frac{\alpha_1 l_{r2}}{l_{r1}}\left(\frac{p+2\lambda}{(p+2\lambda)\alpha_2-\beta_2 l_{r2}}\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{p+2\lambda}-\frac{p}{p\alpha_2+\beta_2 l_{r2}}\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{p}\right)+\beta_1 S_p(l_{r1})\right]^{-1}$$

$$T_2(r,\theta)=\frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi}\left(\begin{array}{l}\sum_{p=0}^{p=+\infty}B_{2p}^{+}\frac{(2p)!(2p+\lambda)}{\Gamma(2p+2\lambda)}G_{2p}S_{2p}(r)C_{2p}^{\lambda}(Cos(\theta))+\\+\sum_{p=0}^{p=+\infty}B_{2p+1}^{-}\frac{(2p+1)!(2p+1+\lambda)}{\Gamma(2p+1+2\lambda)}G_{2p+1}S_{2p+1}(r)C_{2p+1}^{\lambda}(Cos(\theta))\end{array}\right).$$

Ce qui donne la solution globale suivante :

$$A_{2p}^{+}=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}T_{ext}^{+}(z)C_{2p}^{\lambda}(z)\quad A_{2p+1}^{-}=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}T_{ext}^{-}(z)C_{2p+1}^{\lambda}(z)\quad z=Cos(\theta)$$

$$B_{2p}^{+}=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}T_{\mathrm{int}}^{+}(z)C_{2p}^{\lambda}(z)\quad B_{2p+1}^{-}=\int_{-1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}T_{\mathrm{int}}^{-}(z)C_{2p+1}^{\lambda}(z)$$

$$T_{\mathrm{int}}^{+}(z)=\frac{T_{\mathrm{int}}(z)+T_{\mathrm{int}}(-z)}{2}\quad T_{\mathrm{int}}^{-}(z)=\frac{T_{\mathrm{int}}(z)-T_{\mathrm{int}}(-z)}{2}\quad T_{ext}^{+}(z)=\frac{T_{ext}(z)+T_{ext}(-z)}{2}\qquad T_{ext}^{-}(z)=\frac{T_{ext}(z)-T_{ext}(-z)}{2}$$

$$R_p(r)=\frac{l_{r1}}{p\alpha_1-\beta_1 l_{r1}}\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{p}+\frac{l_{r1}}{(p+2\lambda)\alpha_1+\beta_1 l_{r1}}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{p+2\lambda}\quad S_p(r)=\frac{l_{r2}}{p\alpha_2+\beta_2 l_{r2}}\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{p}+\frac{l_{r2}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{p+2\lambda}}{(p+2\lambda)\alpha_2-\beta_2 l_{r2}}$$

$$D_p=\beta_2\left[\frac{\alpha_2 l_{r1}}{l_{r2}}\left(\frac{p}{p\alpha_1-\beta_1 l_{r1}}\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{p}-\frac{(p+2\lambda)}{(p+2\lambda)\alpha_1+\beta_1 l_{r1}}\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{p+2\lambda}\right)+\beta_2 R_p(l_{r2})\right]^{-1}$$

$$G_p=\beta_1\left[\frac{\alpha_1 l_{r2}}{l_{r1}}\left(\frac{p+2\lambda}{(p+2\lambda)\alpha_2-\beta_2 l_{r2}}\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{p+2\lambda}-\frac{p}{p\alpha_2+\beta_2 l_{r2}}\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{p}\right)+\beta_1 S_p(l_{r1})\right]^{-1}$$

$$T(r,\theta)=\frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi}\left(\begin{array}{l}\sum_{p=0}^{p=+\infty}A_{2p}^{+}\frac{(2p)!(2p+\lambda)}{\Gamma(2p+2\lambda)}D_{2p}R_{2p}(r)C_{2p}^{\lambda}(Cos(\theta))+\\+\sum_{p=0}^{p=+\infty}A_{2p+1}^{-}\frac{(2p+1)!(2p+1+\lambda)}{\Gamma(2p+1+2\lambda)}D_{2p+1}R_{2p+1}(r)C_{2p+1}^{\lambda}(Cos(\theta))\end{array}\right)+$$

$$+\frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi}\left(\begin{array}{l}\sum_{p=0}^{p=+\infty}B_{2p}^{+}\frac{(2p)!(2p+\lambda)}{\Gamma(2p+2\lambda)}G_{2p}S_{2p}(r)C_{2p}^{\lambda}(Cos(\theta))+\\+\sum_{p=0}^{p=+\infty}B_{2p+1}^{-}\frac{(2p+1)!(2p+1+\lambda)}{\Gamma(2p+1+2\lambda)}G_{2p+1}S_{2p+1}(r)C_{2p+1}^{\lambda}(Cos(\theta))\end{array}\right)$$

.

Construction des fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce, formules de liaison

Il est temps d'aborder les problèmes aux limites sur des sections coniques de l'hypersphère. Pour cela rappelons la méthode de construction des fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce :

$$C_\nu^\lambda(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) \quad \text{Gegenbauer première espèce}$$

$$C_{(Q),\nu}^\lambda(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) \quad \text{Gegenbauer deuxième espèce}$$

Car selon les problèmes aux limites, nous utiliserons également la solution de deuxième espèce. Dans le cas des problèmes aux limites homogènes angulaire, l'ordre des fonctions de Gegenbauer n'est plus entier mais réel, et le jeu de fonctions propres est liés à la détermination des valeurs propres solution d'une équation transcendantale d'annulation de fonctions de Gegenbauer à des valeurs d'angle définie : par exemple l'angle d'ouverture du cône.

Dans ce cas, il apparaît de déterminer des formules de liaisons dans les fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce lorsque la variable change de signe. Pour cela partons des formules de Liaisons des fonctions associées de Legendre :

$$P_\nu^\mu(-z) = Cos((\nu+\mu)\pi)P_\nu^\mu(z) + \frac{2}{\pi}Sin((\nu+\mu)\pi)Q_\nu^\mu(z)$$

$$\Rightarrow Q_\nu^\mu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{Cos((\nu+\mu)\pi)P_\nu^\mu(z) - P_\nu^\mu(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)} \Rightarrow Q_\nu^\mu(-z) = \frac{\pi}{2}\frac{Cos((\nu+\mu)\pi)P_\nu^\mu(-z) - P_\nu^\mu(z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)}$$

$$\Rightarrow Cos((\nu+\mu)\pi)Q_\nu^\mu(z) + Q_\nu^\mu(-z) = \frac{\pi}{2}\frac{(Cos((\nu+\mu)\pi))^2 P_\nu^\mu(z) - Cos((\nu+\mu)\pi)P_\nu^\mu(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)} +$$

$$+\frac{\pi}{2}\frac{Cos((\nu+\mu)\pi)P_\nu^\mu(-z) - P_\nu^\mu(z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)} = \frac{\pi P_\nu^\mu(z)}{2Sin((\nu+\mu)\pi)}\left((Cos((\nu+\mu)\pi))^2 - 1\right) =$$

$$= -\frac{\pi P_\nu^\mu(z)}{2Sin((\nu+\mu)\pi)}(Sin((\nu+\mu)\pi))^2 \Rightarrow P_\nu^\mu(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{Cos((\nu+\mu)\pi)Q_\nu^\mu(z) + Q_\nu^\mu(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)}$$

Soit résumé :

$$P_\nu^\mu(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{Cos((\nu+\mu)\pi)Q_\nu^\mu(z) + Q_\nu^\mu(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)} \quad Q_\nu^\mu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{Cos((\nu+\mu)\pi)P_\nu^\mu(z) - P_\nu^\mu(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)}.$$

Appliquons ces formules de liaison aux fonctions associées servant à la construction des fonctions de Gegenbauer :

$$P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{Cos(\nu\pi)Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) + Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(-z)}{Sin(\nu\pi)} \Rightarrow C_\nu^\lambda(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{Cos(\nu\pi)C_{(Q),\nu}^\lambda(z) + C_{(Q),\nu}^\lambda(-z)}{Sin(\nu\pi)}$$

$$Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) = \frac{\pi}{2}\frac{Cos(\nu\pi)P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) - P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(-z)}{Sin(\nu\pi)} \Rightarrow C_{(Q),\nu}^\lambda(z) = \frac{\pi}{2}\frac{Cos(\nu\pi)C_\nu^\lambda(z) - C_\nu^\lambda(-z)}{Sin(\nu\pi)}.$$

Construction des solutions des problèmes aux limites et parité des fonctions propres

Autrement dit les formules de liaison précédentes sont exactement les mêmes formules de liaisons que celles entre les fonctions de Legendre de première et deuxième espèce . Or nous avons proposé un modèle de construction des fonctions propres sur un problème aux limites symétrique en angle, homogène de Neumann ou Dirichlet, sur une section conique tridimensionnelle. Les résultats peuvent être intégralement transposés dans une configuration n-dimensionnel de la section conique.

Cas des fonctions propres solutions du problème aux limites homogène de Dirichlet sur une section conique hyper-sphérique

Soit ν_l, une valeur propre d'une fonction propre solution du problème aux limites dans la dimension homogène (angulaire). Formons les combinaisons linéaires paires et impaires des fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce, il vient :

$$C^{\lambda}_{\nu_l}(z)+C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)=-\frac{2\big(Cos(\lambda_n\pi)+1\big)}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\Big(C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)+C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)\Big)$$

$$C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)+C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)=\frac{\pi\big(Cos(\lambda_n\pi)-1\big)}{2Sin(\lambda_n\pi)}\Big(C^{\lambda}_{\nu_l}(z)+C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)\Big)$$

De même :

$$C^{\lambda}_{\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)=-\frac{2\big(Cos(\nu_l\pi)-1\big)}{\pi\, Sin(\nu_l\pi)}\Big(C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)\Big)$$

$$C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)=\frac{\pi\big(Cos(\nu_l\pi)+1\big)}{2Sin(\nu_l\pi)}\Big(C^{\lambda}_{\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)\Big)$$

Donnons quelques propriétés des valeurs propres et des fonctions propres dans le cas $\theta_2=\pi-\theta_1$, $\mu_1=-\mu_2$:

$$\mu_1=Cos(\theta_2)\,;\ \mu_2=Cos(\theta_1)\quad \nu_l\quad tq\quad \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}$$

$$Configuration\ symétrique\ \theta_2=\pi-\theta_1\Rightarrow\mu_1=-\mu_2\Rightarrow\nu_l\quad tq\quad \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(-\mu_2)}=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-\mu_2)}$$

Ce qui donne :

$$\alpha=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(-\mu_2)}=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-\mu_2)}=\frac{\big(Cos(\nu_l\pi)C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)-C^{\lambda}_{\nu_l}(-\mu_2)\big)}{\big(Cos(\nu_l\pi)C^{\lambda}_{\nu_l}(-\mu_2)-C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)\big)}=\frac{\big(\alpha\, Cos(\nu_l\pi)-1\big)}{\big(Cos(\nu_l\pi)-\alpha\big)}$$

$$\Rightarrow\alpha=\frac{\big(\alpha\, Cos(\nu_l\pi)-1\big)}{\big(Cos(\nu_l\pi)-\alpha\big)}\Rightarrow\alpha^2=1$$

$$\alpha^2=\left(\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(-\mu_2)}\right)^2=\left(\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-\mu_2)}\right)^2=1\Rightarrow\alpha=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(-\mu_2)}=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-\mu_2)}=\pm1$$

.

Il apparait donc deux cas de figure selon les valeurs propres: le cas de valeurs identiques ou opposées aux extrémités :

$$Cas \quad \alpha = 1 = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(-\mu_2)} = \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-\mu_2)} \Rightarrow valeurs\ identiques\ aux\ extrémités$$

$$Cas \quad \alpha = -1 = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(-\mu_2)} = \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-\mu_2)} \Rightarrow valeurs\ opposées\ aux\ extrémités$$

En appliquant cette dernière propriété remarquable des fonctions propres aux limites du domaine, en la combinant avec les formules de liaisons entre fonctions de première et deuxième espèce, il vient pour le cas pair :

$$Cas \quad \alpha = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(-\mu_2)} = \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-\mu_2)} = 1 \Rightarrow valeurs\ identiques\ aux\ extrémités$$

$$C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2) = -\frac{2\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}{\pi\ Sin(\nu_l\pi)} C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)$$

$$C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2) = \frac{\pi\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}{2Sin(\nu_l\pi)} C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)$$

Et pour le cas impair :

$$Cas \quad \alpha = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(-\mu_2)} = \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-\mu_2)} = -1 \Rightarrow valeurs\ opposées\ aux\ extrémités$$

$$C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2) = -\frac{2\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}{\pi\ Sin(\nu_l\pi)} C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)$$

$$C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2) = \frac{\pi\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}{2Sin(\nu_l\pi)} C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)$$

.

De ces diverses formules on peut tirer une propriété remarquable des fonctions propres à savoir :

$$Cas \quad \alpha = 1 = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(-\mu_2)} = \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-\mu_2)}$$

$$Fonctions\ propres\ \Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)} - \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}\ impaires \qquad \Phi_{\nu_l}(-z) = -\Phi_{\nu_l}(z)$$

$$Cas \quad \alpha = -1 = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(-\mu_2)} = \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-\mu_2)}$$

$$Fonctions\ propres\ \Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)} - \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}\ paires \qquad \Phi_{\nu_l}(-z) = \Phi_{\nu_l}(z)$$

Démontrons la propriétés de parité des fonctions propres, et raisonnons avec les fonctions propres de la forme :

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)} - \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}$$

Les calculs seraient identiques avec les fonctions propres de la forme :

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)} - \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)} = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(-\mu_2)} - \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-\mu_2)}.$$

Premier cas α=1

On applique successivement les formules de liaison sur les fonctions de Gegenbauer, les combinaisons paires ou impaires et les valeurs extrêmes, et cela donne :

$$\Phi_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z)=\frac{-2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)Cos(\nu_l\pi)+C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)}{\frac{-2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}-\frac{\pi}{2Sin(\nu_l\pi)}\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)Cos(\nu_l\pi)-C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)}{\frac{\pi}{2Sin(\nu_l\pi)}C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)Cos(\nu_l\pi)+C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}-\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)Cos(\nu_l\pi)-P_{\lambda_n}(-z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)-C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)+C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}-\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)+C^{\lambda}_{\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}+\frac{-C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)+C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}-\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}-\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z)=-\Phi_{\nu_l}(z)-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}-\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)-P_{\lambda_n}(-z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z)=-\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}=-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}$$

$\Phi_{\nu_l}(z)$ *fonction impaire*

Deuxième cas α=-1

On applique également les formules de liaison sur les fonctions de Gegenbauer, les combinaisons paires ou impaires et les valeurs extrêmes, et cela donne :

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)} - \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{-2}{\pi\, Sin(\lambda_n \pi)} \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)Cos(\nu_l \pi) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-z)}{\frac{2}{\pi\, Sin(\lambda_n \pi)} C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(1 - Cos(\nu_l \pi)\right)} - \frac{\pi}{2Sin(\lambda_n \pi)} \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)Cos(\nu_l \pi) - C_{\nu_l}^{\lambda}(-z)}{\frac{\pi}{2Sin(\lambda_n \pi)} C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l \pi) + 1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)Cos(\nu_l \pi) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l \pi) - 1\right)} - \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)Cos(\nu_l \pi) - P_{\lambda_n}(-z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l \pi) + 1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)\left(Cos(\nu_l \pi) - 1\right) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l \pi) - 1\right)} - \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)\left(Cos(\nu_l \pi) + 1\right) - C_{\nu_l}^{\lambda}(z) - P_{\lambda_n}(-z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l \pi) + 1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)} - \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)} + \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l \pi) - 1\right)} - \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l \pi) + 1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z) = -\Phi_{\lambda_n}(z) + \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l \pi) - 1\right)} + \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l \pi) + 1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l \pi) + 1\right)} = \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l \pi) - 1\right)}$$

$\Phi_{\nu_l}(z)$ *fonction paire*

.

La conséquence des propriétés de parité des fonctions propres sur les intégrales utilisées dans le développement en série est immédiate à savoir :

$Premier\ cas\ \alpha = 1 \Rightarrow \Phi_{\nu_l}(z)\ fonction\ impaire$

$Condition\ aux\ limites\ paire\ f(z) = f(-z)$

$$A_{\nu_l} = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f(z)\Phi_{\nu_l}(z) = 0$$

$Condition\ aux\ limites\ impaire\ f(z) = -f(-z)$

$$A_{\nu_l} = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f(z)\Phi_{\nu_l}(z) = 2\int_{0}^{\mu_2} dz\ f(z)\Phi_{\nu_l}(z) \neq 0$$

$Deuxième\ cas\ \alpha = -1 \Rightarrow \Phi_{\nu_l}(z)\ fonction\ paire$

$Condition\ aux\ limites\ paire\ f(z) = f(-z)$

$$A_{\nu_l} = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f(z)\Phi_{\nu_l}(z) = 2\int_{0}^{\mu_2} dz\ f(z)\Phi_{\nu_l}(z) \neq 0$$

$Condition\ aux\ limites\ impaire\ f(z) = -f(-z)$

$$A_{\nu_l} = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f(z)\Phi_{\nu_l}(z) = 0$$

En d'autres termes, lorsque la condition aux limites est paire, alors seules les coefficients des fonctions propres paires donnent un résultat non nul, par construction la solution est donc bien paire. Il en est de même pour la condition aux limites impaire où dans la série seuls les coefficients des fonctions propres impaires sont non nuls, conduisant à une solution impaire.

*Caractérisons précisément le système des valeurs et fonctions propres de ce problème aux limites de Dirichlet sur la section sphérique symétrique. En revenant aux propriétés connues d'un système de Sturm-Liouville, l'équation différentielle de la partie angulaire devient ici un système **régulier de Sturm-Liouville**, et non un système singulier comme avec le cas de l'hypersphère complète :*

$$q(z) = 0 \quad s(z) = 0 \quad w(z) = \left(1 - z^2\right)^{\frac{2\lambda - 1}{2}} \quad p(z) = \left(1 - z^2\right)^{\frac{2\lambda + 1}{2}} \quad \omega = \nu(\nu + 2\lambda) \quad \lambda = \frac{n-2}{2} > 0$$

$$\Rightarrow p(z) > 0 \quad p(-\mu_2) = p(\mu_2) = \left(1 - {\mu_2}^2\right)^{\frac{2\lambda + 1}{2}}$$

Dans ces conditions toutes les propriétés d'un système régulier de Sturm-Liouville s'appliquent et notamment :

- il y a une infinité de valeur propres tendant vers l'infini

- comme les conditions homogènes sont de Dirichlet, les valeurs propres sont toutes positives, et de plus il y a un nombre grandissant de zéros des fonctions propres à mesure que les valeurs propres augmentent, en plus des deux zéros fixés aux extrémités par les conditions homogènes de Dirichlet

- on peut fixer la plus petite valeurs propre à la fonction propre ne possédant que les seuls deux zéros des extrémités, par conséquent ne s'annulant pas en zéro, cette fonction propre de valeur propre minimale est nécessairement paire (α=-1) : $\Phi_{\nu_0}(z), \alpha(\nu_0) = -1$

- concernant les fonctions propres de valeur propre supérieure, prenons la première immédiatement au dessus $\Phi_{\nu_1}(z) \quad \nu_1 > \nu_0$*, alors d'après les propriétés dîtes d'oscillation, il y a nécessairement au moins un zéro entre les deux zéros* $\Phi_{\nu_0}(z)$*. Comme cette fonction ne peut comporter que trois zéros, elle est nécessairement impaire et s'annule donc en zéro :* $\Phi_{\nu_1}(0) = 0$

donc $\Phi_{\nu_1}(z)\ impaire, \alpha(\nu_1)=1$

- on étend le même raisonnement en appliquant successivement le théorème "d'oscillation", pour conclure que $\Phi_{\nu_2}(z)\ paire, \alpha(\nu_2)=-1, 4\ zéros$ *puis alternativement pour les fonctions propres :*

$\alpha(\nu_l)=(-1)^{l+1}$

$2\ zéros\ venant\ des\ conditions\ aux\ limites\ \Phi_{\nu_l}(-\mu_2)=\Phi_{\nu_l}(\mu_2)=0$

$\Phi_{\nu_{2p}}(z)\ paire, 2p+2\ zéros$

$\Phi_{\nu_{2p+1}}(z)\ impaire, 2p+3\ zéros\ ,\Phi_{\nu_{2p}}(0)=0$

<u>Cas des fonctions propres solutions du problème aux limites homogène de Neumann sur une section conique hyper-sphérique</u>

A la manière de l'étude précédente réalisée sur le problème aux limites de Dirichlet pour une configuration symétrique de section conique hyper-sphérique, dégageons quelques propriétés des valeurs et fonction propres pour un problème de Neumann dans une configuration symétrique :

$$\theta_2=\pi-\theta_1 \Rightarrow \mu_2=Cos(\theta_1), \mu_1=-\mu_2$$

$$C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_1)=\frac{\left(-\nu_l\mu_2C_{\nu_l}^{\lambda}(-\mu_2)-(2\lambda-1+\nu_l)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(-\mu_2)\right)}{\mu_2{}^2-1} \quad C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)=\frac{\left(\nu_l\mu_2C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)-(2\lambda-1+\nu_l)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_2)\right)}{\mu_2{}^2-1}$$

$$C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_1)=\frac{\left(-\nu_l\mu_2C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-\mu_2)-(2\lambda-1+\nu_l)C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda}(-\mu_2)\right)}{\mu_2{}^2-1}$$

$$C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)=\frac{\left(\nu_l\mu_2C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)-(2\lambda-1+\nu_l)C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_2)\right)}{\mu_2{}^2-1} \quad soit\ \nu_l \quad tq \quad \nu_l=0 \quad ou \quad \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}=\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}$$

$$ou \quad \frac{\left(\nu_l\mu_2C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)-(2\lambda-1+\nu_l)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_2)\right)}{\left(-\nu_l\mu_2C_{\nu_l}^{\lambda}(-\mu_2)-(2\lambda-1+\nu_l)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(-\mu_2)\right)}=\frac{\left(\nu_l\mu_2C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)-(2\lambda-1+\nu_l)C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_2)\right)}{\left(-\nu_l\mu_2C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-\mu_2)-(2\lambda-1+\nu_l)C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda}(-\mu_2)\right)}$$

$$Posons\ le\ choix\ des\ fonctions\ propres\ suivantes\ \Phi_{\nu_l}(z)=\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}-\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}$$

Voici quelques propriétés de liaison des dérivées premières des fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce pour les indices ν_l non entiers.

$$C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(z)=-\frac{2}{\pi\ Sin(\nu_l\pi)}\left(Cos(\nu_l\pi)C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(z)-C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-z)\right)$$

$$C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(z)=\frac{\pi}{2Sin(\nu_l\pi)}\left(Cos(\nu_l\pi)C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(z)+C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-z)\right)$$

.

Formons les combinaisons linéaires paires et impaires des dérivées premières des fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce, il vient :

$$C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(z)+C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-z)=-\frac{2\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}{\pi\ Sin(\nu_l\pi)}\left(C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(z)+C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-z)\right)$$

$$C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(z)+C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-z)=\frac{\pi\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}{2Sin(\nu_l\pi)}\left(C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(z)+C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-z)\right)$$

De même :

$$C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(z)-C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-z)=-\frac{2\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}{\pi\ Sin(\nu_l\pi)}\left(C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(z)-C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-z)\right)$$

$$C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(z)-C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-z)=\frac{\pi\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}{2Sin(\nu_l\pi)}\left(C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(z)-C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-z)\right)$$

Donnons quelques propriétés des valeurs propres et des fonctions propres dans le cas $\theta_2=\pi-\theta_1$, $\mu_1=-\mu_2$:

$$\theta_2=\pi-\theta_1 \Rightarrow \mu_1=Cos(\theta_2)\,;\ \mu_2=Cos(\theta_1)\quad \mu_1=-\mu_2$$

$$\Rightarrow \nu_l \quad tq \quad \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}=\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}\quad ou \quad \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}=\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}.$$

Ce qui donne :

$$Posons\ \alpha=\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}=\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}$$

$$\alpha=\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}=\frac{\left(Cos(\nu_l\pi)C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)+C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)\right)}{\left(Cos(\nu_l\pi)C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)+C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)\right)}=\frac{\left(\alpha\,Cos(\nu_l\pi)+1\right)}{\left(Cos(\nu_l\pi)+\alpha\right)}\Rightarrow\alpha=\frac{\left(\alpha\,Cos(\nu_l\pi)+1\right)}{\left(Cos(\nu_l\pi)+\alpha\right)}\Rightarrow\alpha^2=1$$

$$\alpha^2=\left(\frac{P_{\lambda_n}{}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}{}'(-\mu_2)}\right)^2=\left(\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}\right)^2=1\Rightarrow\alpha=\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}=\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}=\pm1$$

Il apparait donc deux cas de figure selon les valeurs propres: le cas de valeurs identiques ou opposées aux extrémités :

$$Cas\quad \alpha=1=\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}=\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}\Rightarrow valeurs\ identiques\ des\ dérivées\ aux\ extrémités$$

$$Cas\quad \alpha=-1=\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}=\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}\Rightarrow valeurs\ opposées\ des\ dérivées\ aux\ extrémités$$

En appliquant cette dernière propriété remarquable des fonctions propres aux limites du domaine, en la combinant avec les formules de liaisons entre fonctions de première et deuxième espèce, il vient pour le cas α=1 :

$$Cas\quad \alpha=\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}=\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}=1\Rightarrow valeurs\ identiques\ aux\ extrémités$$

$$C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)=-\frac{2\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}{\pi\ Sin(\nu_l\pi)}C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)$$

$$C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)=\frac{\pi\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}{2Sin(\nu_l\pi)}C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)$$

Et pour le cas α=-1 :

$$Cas\quad \alpha=\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}=\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}=-1\Rightarrow valeurs\ opposées\ aux\ extrémités$$

$$C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)=-\frac{2\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}{\pi\ Sin(\nu_l\pi)}C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)$$

$$C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)=\frac{\pi\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}{2Sin(\nu_l\pi)}C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)$$

.

De ces diverses formules on peut tirer une propriété remarquable des fonctions propres à savoir :

$$Cas \quad \alpha = 1 = \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)} = \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}$$

$$Fonctions\ propres\ \Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)} - \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}\ paires \qquad \Phi_{\nu_l}(-z) = \Phi_{\nu_l}(z)$$

$$Cas \quad \alpha = -1 = \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)} = \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}$$

$$Fonctions\ propres\ \Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)} - \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}\ impaires \qquad \Phi_{\nu_l}(-z) = -\Phi_{\nu_l}(z)$$

Démontrons la propriétés de parité des fonctions propres, et raisonnons avec les fonctions propres de la forme : $\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)} - \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}$*. Les calculs seraient identiques avec les fonctions propres de la forme :* $\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_1)} - \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_1)} = \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)} - \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(-\mu_2)}$.

Premier cas α=1

On applique successivement les formules de liaison sur les fonctions de Gegenbauer, les combinaisons paires ou impaires et les valeurs extrêmes des dérivées premières, et cela donne :

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)} - \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{-2}{\pi\ Sin(\lambda_n\pi)} \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)Cos(\nu_l\pi) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-z)}{\frac{-2}{\pi\ Sin(\lambda_n\pi)} C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)} - \frac{\pi}{2Sin(\nu_l\pi)} \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)Cos(\nu_l\pi) - C_{\nu_l}^{\lambda}(-z)}{\frac{\pi}{2Sin(\nu_l\pi)} C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)Cos(\nu_l\pi) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)} - \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)Cos(\nu_l\pi) - C_{\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)} - \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right) - C_{\nu_l}^{\lambda}(z) - C_{\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)} + \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)} - \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)} + \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z) = -\Phi_{\nu_l}(z) + \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)} + \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)} = \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z) + C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(-z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}$$

$\Phi_{\nu_l}(z)$ *fonction paire*

Deuxième cas α=-1

On applique également les formules de liaison sur les fonctions de Gegenbauer, les combinaisons paires ou impaires et les valeurs extrêmes des dérivées premières, et cela donne :

$$\Phi_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}{}'(\mu_2)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}{}'(\mu_2)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z)=\frac{\dfrac{-2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\left(C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)Cos(\nu_l\pi)+C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)\right)}{-\dfrac{2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}-\frac{\dfrac{\pi}{2Sin(\nu_l\pi)}\left(C^{\lambda}_{\nu_l}(z)Cos(\nu_l\pi)-C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)\right)}{\dfrac{\pi}{2Sin(\nu_l\pi)}C^{\lambda}_{\nu_l}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)Cos(\nu_l\pi)+C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}-\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)Cos(\nu_l\pi)-C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)-C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)+C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}-\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)+C^{\lambda}_{\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}{}'(\mu_2)}-\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}{}'(\mu_2)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}-\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z)=-\Phi_{\nu_l}(z)-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}-\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z)=-\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)-1\right)}=-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)-C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(-z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}{}'(\mu_2)\left(Cos(\nu_l\pi)+1\right)}$$

$\Phi_{\nu_l}(z)$ *fonction impaire*

La conséquence des propriétés de parité des fonctions propres sur les intégrales utilisées dans le développement en série est immédiate, à savoir :

Premier cas $\alpha=1\Rightarrow\Phi_{\nu_l}(z)$ *fonction paire*

Condition aux limites paire $f(z)=f(-z)$ *Condition aux limites impaire* $f(z)=-f(-z)$

$$A_{\nu_l}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\ f(z)\Phi_{\nu_l}(z)=2\int_{0}^{\mu_2}dz\ f(z)\Phi_{\nu_l}(z)\neq 0\qquad A_{\nu_l}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\ f(z)\Phi_{\nu_l}(z)=0$$

Deuxième cas $\alpha=-1\Rightarrow\Phi_{\nu_l}(z)$ *fonction impaire*

Condition aux limites paire $f(z)=f(-z)$ *Condition aux limites impaire* $f(z)=-f(-z)$

$$A_{\nu_l}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\ f(z)\Phi_{\nu_l}(z)=0\qquad A_{\nu_l}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\ f(z)\Phi_{\nu_l}(z)=2\int_{0}^{\mu_2}dz\ f(z)\Phi_{\nu_l}(z)\neq 0$$

.

En d'autres termes, lorsque la condition aux limites est paire, alors seules les coefficients des fonctions propres paires donnent un résultat non nul, par construction la solution est donc bien paire. Il en est de même pour la condition aux limites impaire où dans la série seuls les coefficients des fonctions propres impaires sont non nuls, conduisant à une solution impaire.

*Caractérisons précisément le système des valeurs et fonctions propres de ce problème aux limites de Neumann sur la section sphérique symétrique. En revenant aux propriétés connues d'un système de Sturm-Liouville, l'équation différentielle de la partie angulaire devient ici un système **régulier de Sturm-Liouville** :*

$$q(z)=0 \quad s(z)=0 \quad w(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \quad p(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \quad \omega=\nu(\nu+2\lambda) \quad \lambda=\frac{n-2}{2}>0$$

$$\Rightarrow p(z)>0 \quad p(-\mu_2)=p(\mu_2)=\left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}$$

Dans ces conditions toutes les propriétés d'un système régulier de Sturm-Liouville s'appliquent et notamment :

- il y a une infinité de valeur propres tendant vers l'infini

- comme les conditions homogènes sont de Neumann, les valeurs propres sont toutes positives, et de plus il y a un nombre grandissant de zéros des fonctions propres à mesure que les valeurs propres augmentent, en plus des deux zéros fixés aux extrémités par les conditions homogènes de Dirichlet

- on peut fixer la plus petite valeurs propre à la fonction propre ne possédant qu'un seul zéros à la valeur z=0, par conséquent cette fonction propre de valeur propre minimale est nécessairement impaire (α=-1) car elle s'annule en z=0 : $\Phi_{\nu_0}(z), \Phi_{\nu_0}(0)=0, \alpha(\nu_0)=-1$

- concernant les fonctions propres de valeur propre supérieure, prenons la première immédiatement au dessus $\Phi_{\nu_1}(z) \quad \nu_1>\nu_0$*, alors d'après les propriétés dîtes d'oscillation, il y a nécessairement au moins un zéro avant z=0 et un autre également après . Comme cette fonction ne peut comporter que deux zéros, elle est nécessairement paire et ne s'annule pas en zéro :* $\Phi_{\nu_1}(0)\neq 0$ *donc* $\Phi_{\nu_1}(z)\ paire, \alpha(\nu_1)=1$

- on étend le même raisonnement en appliquant successivement le théorème "d'oscillation", pour conclure que $\Phi_{\nu_2}(z)\ impaire, \Phi_{\nu_2}(0)=0, \alpha(\nu_2)=-1, 3\ zéros$ *puis alternativement pour les fonctions propres :*

$$\alpha(\nu_l)=(-1)^{l-1} \quad Les\ pentes\ aux\ extrémités\ sont\ nulles\ voir\ C.L.\ \Phi_{\nu_l}{}'(-\mu_2)=\Phi_{\nu_l}{}'(\mu_2)=0$$

$$\Phi_{\nu_{2p}}(z)\ impaire, 2p+1\ zéros\ , \Phi_{\nu_{2p}}(0)=0 \quad .$$

$$\Phi_{\nu_{2p+1}}(z)\ paire, 2p+2\ zéros$$

Problème aux limites à l'intérieur d'un cône hyper-sphérique d'angle ouvert ϑ_0 fini

Soit le problème intérieur de Dirichlet sur un cône hyper-sphérique centré sur l'axe x_1 et d'angle d'ouverture ϑ_0, homogène sur la surface latérale du cône et inhomogène dans la dimension radiale :

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\big|/\vec{\mathbf{x}}\in C_{\Omega n} \quad r=\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}$$

$$C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}\in\left[0,x_1^{\,2}\left(\frac{Sin(\vartheta_0)}{Cos(\vartheta_0)}\right)^2\right]\right\}\cap\{\vec{x}\,/\,0\le r\le l_r\}$$

$$\partial C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}=x_1^{\,2}(Tan(\vartheta_0))^2\right\}\cap\{\vec{x}\,/\,r=l_r\}$$

$$C.L.\quad T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f(\theta)$$

Le respect de la condition aux limites et de la condition de finitude de la solution en r=0, conduit à une forme de solution :

$$\mu_0=Cos(\theta_0)\quad T(r,\theta)=\sum_{l\neq0,+\infty}B_n\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l}C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))\quad \nu_l\quad tq\quad C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta_0))=0\Leftrightarrow C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)=0$$

Le respect de la condition aux limites inhomogène radiale, et l'orthogonalité des fonctions propres de Gegenbauer de première espèce, conduit à la solution suivante :

$$\mu_0=Cos(\theta_0)\quad T(r,\theta)=\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{B_n}{\left\|C^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right\|^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l}C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))\quad \nu_l\quad tq\quad C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta_0))=0\Leftrightarrow C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)=0$$

$$B_n=\int_{\mu_0}^{1}dz\,(1-z^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_\theta(z)\,C^{\lambda}_{\nu_l}(z)\quad avec\quad\Rightarrow\begin{cases}\left\|C^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right\|^2=-\dfrac{(1-\mu_0^{\,2})^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)}{(2\nu_l+2\lambda)}\dfrac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial\nu}C^{\lambda}_{\nu_l-1}(\mu_0)\\ ou\\ \left\|C^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right\|^2=\displaystyle\int_{\mu_0}^{1}dz(1-z^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(C^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right)^2\\ =\dfrac{(1-\mu_0^{\,2})^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+1)}{(2\nu_l+2\lambda)}\dfrac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial\nu}C^{\lambda}_{\nu_l+1}(\mu_0)\end{cases}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=-\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)B_n}{(1-\mu_0^{\,2})^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)\dfrac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial\nu}C^{\lambda}_{\nu_l-1}(\mu_0)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l}C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))$$

.

Problème aux limites à l'intérieur d'un cône hyper-sphérique d'angle ouvert ϑ_0 non bornée radialement

Soit le problème intérieur de Dirichlet sur un cône hyper-sphérique centré sur l'axe x_1 et d'angle d'ouverture ϑ_0, homogène sur la surface latérale du cône et inhomogène dans la dimension radiale :

$$\Delta_{r,\theta}^{n} T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\big|/\vec{\mathbf{x}}\in C_{\Omega n} \quad r=\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$$

$$C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}/x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}\in\left[0,x_1^{\,2}\left(\frac{Sin(\vartheta_0)}{Cos(\vartheta_0)}\right)^2\right]\right\}\cap\{\vec{x}/r\geq l_r\}$$

$$\partial C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}/x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}=x_1^{\,2}(Tan(\vartheta_0))^2\right\}\cap\{\vec{x}/r=l_r\}$$

$$C.L.\quad T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f(\theta)$$

Le respect de la condition aux limites et de la condition de finitude de la solution en r=∞, conduit à une forme de solution :

$$\mu_0=Cos(\theta_0)\quad T(r,\theta)=\sum_{l\neq 0,+\infty} B_n\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))\quad \nu_l \quad tq \quad C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta_0))=0\Leftrightarrow C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)=0$$

Le respect de la condition aux limites inhomogène radiale, et l'orthogonalité des fonctions propres de Gegenbauer de première espèce, conduit à la solution suivante

$$\mu_0=Cos(\theta_0)\quad T(r,\theta)=\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{B_n}{\left\|C_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right\|^2}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))\quad \nu_l \quad tq \quad C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta_0))=0\Leftrightarrow C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)=0$$

$$B_n=\int_{\mu_0}^{1}dz\ \left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} f_\theta(z)\,C_{\nu_l}^{\lambda}(z)\quad avec\quad\Rightarrow\begin{cases}\left\|C_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right\|^2=-\dfrac{\left(1-\mu_0^{\,2}\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)}{(2\nu_l+2\lambda)}\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)\\ ou\\ \left\|C_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right\|^2=\dfrac{\left(1-\mu_0^{\,2}\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+1)}{(2\nu_l+2\lambda)}\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}C_{\nu_l+1}^{\lambda}(\mu_0)\end{cases}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=-\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)B_n}{\left(1-\mu_0^{\,2}\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

Valeur des dérivées paramétriques des fonctions de Gegenbauer dans le cas d'un cône d'angle d'ouverture $\vartheta_0=\pi/2$

Dans ce cas d'angle d'ouverture droit, on peut calculer précisément la norme des fonctions propres de Gegenbauer. Cela nous permet de retrouver des résultats déjà établi pour un hémisphère à N-dimensions. Nous affirmons que la valeur de la dérivée sur les degrés entier à la valeur zéro:

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(0)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2p+1}=(-1)^{p+1}\frac{\pi\, p!\Gamma(2p+1+2\lambda)}{2^{2\lambda}(2p+1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(p+1+\lambda)}$$

Partons de la relation de récurrence entre les polynômes ou fonctions de Gegenbauer et dérivons cette relation par rapport au paramètre du degré de la fonction de Gegenbauer, il vient :

$$(\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z)-2(\nu+\lambda)zC_\nu^\lambda(z)+(2\lambda+\nu-1)C_{\nu-1}^\lambda(z)=0\Rightarrow 2zC_\nu^\lambda(z)=\frac{(\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z)+(2\lambda+\nu-1)C_{\nu-1}^\lambda(z)}{(\nu+\lambda)}$$

$$\Rightarrow(\nu+1)\frac{\partial C_{\nu+1}^\lambda(z)}{\partial\nu}-2(\nu+\lambda)z\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}+(2\lambda+\nu-1)\frac{\partial C_{\nu-1}^\lambda(z)}{\partial\nu}=-C_{\nu+1}^\lambda(z)+2zC_\nu^\lambda(z)-C_{\nu-1}^\lambda(z)$$

$$\Rightarrow(\nu+1)\frac{\partial C_{\nu+1}^\lambda(z)}{\partial\nu}-2(\nu+\lambda)z\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}+(2\lambda+\nu-1)\frac{\partial C_{\nu-1}^\lambda(z)}{\partial\nu}=\frac{1-\lambda}{\lambda+\nu}\left(C_{\nu+1}^\lambda(z)-C_{\nu-1}^\lambda(z)\right)$$

Valeur en $z=0$

$$\Rightarrow(\nu+1)\frac{\partial C_{\nu+1}^\lambda(0)}{\partial\nu}+(2\lambda+\nu-1)\frac{\partial C_{\nu-1}^\lambda(0)}{\partial\nu}=\frac{1-\lambda}{\lambda+\nu}\left(C_{\nu+1}^\lambda(0)-C_{\nu-1}^\lambda(0)\right)$$

Valeur en $\nu=2p\Rightarrow C_{2p+1}^\lambda(0)=C_{2p-1}^\lambda(0)=0$ *polynômes de Gegenbauer impairs*

$$\Rightarrow(2p+1)\frac{\partial C_{2p+1}^\lambda(0)}{\partial\nu}+(2\lambda+2p-1)\frac{\partial C_{2p-1}^\lambda(0)}{\partial\nu}\Rightarrow\frac{\partial C_{2p+1}^\lambda(0)}{\partial\nu}=-\frac{(2\lambda+2p-1)}{(2p+1)}\frac{\partial C_{2p-1}^\lambda(0)}{\partial\nu}$$

Itération de la récurrence $\rightarrow\dfrac{\partial C_{2p+1}^\lambda(0)}{\partial\nu}=(-1)^p\dfrac{(2\lambda+2p-1)(2\lambda+2p-3)\cdots(2\lambda+2p-(2p-1))}{(2p+1)(2p-1)\cdots(2p-(2p-1))}\dfrac{\partial C_{2p-(2p-1)}^\lambda(0)}{\partial\nu}$

$$\frac{\partial C_{2p+1}^\lambda(0)}{\partial\nu}=(-1)^p\frac{(2\lambda+2p-1)(2\lambda+2p-3)\cdots(2\lambda+2p-(2p-1))}{(2p+1)(2p-1)\cdots(2p-(2p-1))}\frac{\partial C_1^\lambda(0)}{\partial\nu}$$

$$\frac{\partial C_{2p+1}^\lambda(0)}{\partial\nu}=(-1)^p\frac{2^{2p-1}p!\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)\left(\frac{2\lambda+1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{2\lambda+1}{2}+p-2\right)\left(\frac{2\lambda+1}{2}+p-1\right)}{(2p+1)2p(2p-1)(2p-2)\cdots2(2p-(2p-1))}\frac{\partial C_1^\lambda(0)}{\partial\nu}$$

$$\frac{\partial C_{2p+1}^\lambda(0)}{\partial\nu}=(-1)^p\frac{2^{2p-1}p!\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)_p}{(2p+1)!}\frac{\partial C_1^\lambda(0)}{\partial\nu}\Rightarrow\frac{\partial C_{2p+1}^\lambda(0)}{\partial\nu}=(-1)^p\frac{2^{2p-1}p!\Gamma\left(p+\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{(2p+1)!\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}\frac{\partial C_1^\lambda(0)}{\partial\nu}$$

$$\frac{\partial C_{2p+1}^\lambda(0)}{\partial\nu}=(-1)^p\frac{\sqrt{\pi}\,p!\Gamma(2\lambda+1+2p)}{2^{2\lambda}(2p+1)!\Gamma(\lambda+1+p)\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}\frac{\partial C_1^\lambda(0)}{\partial\nu}$$

Vérification $n=3\Rightarrow\lambda=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{\partial C_{2p+1}^\lambda(0)}{\partial\nu}=(-1)^p\dfrac{\sqrt{\pi}\,p!}{2\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)}\dfrac{\partial C_1^\lambda(0)}{\partial\nu}=(-1)^p\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\dfrac{\partial C_1^\lambda(0)}{\partial\nu}$

Comparons avec deux formules, celle connue de la norme des polynômes de Gegenbauer de degré impair, qui sont les fonctions propres pour un problème aux limites sur un hémisphère et celle générale faisant intervenir la dérivée paramétrique., il vient :

$$\mu_0 = Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left\|C_{2p+1}^{\lambda}(z)\right\|^2 = \int_0^1 dz\ \left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \left(C_{2p+1}^{\lambda}(z)\right)^2 = -\frac{(p+\lambda)}{(2p+1+\lambda)} \frac{\partial C_{2p+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} C_{2p}^{\lambda}(0) \\ \left\|C_{2p+1}^{\lambda}(z)\right\|^2 = \frac{(p+1)}{(2p+1+\lambda)} \frac{\partial C_{2p+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} C_{2p+2}^{\lambda}(0) \end{cases}$$

$$C_{\nu}^{\lambda}(0) = \frac{2^{1-2\lambda}\pi\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2\lambda+1}{2}\right)} \Rightarrow C_{2p+2}^{\lambda}(0) = \frac{2^{1-2\lambda}\pi\,\Gamma(2p+2+2\lambda)}{\Gamma(2p+3)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(-\frac{1+2p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2p+3+2\lambda}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow C_{2p+2}^{\lambda}(0) = \frac{2^{2p+2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1+\lambda)}{(2p+2)!\Gamma(\lambda)\Gamma\left(-\frac{1+2p}{2}\right)} \quad or \quad \Gamma\left(-\frac{1+2p}{2}\right) = (-1)^{p+1}\frac{2^{2p+1}\sqrt{\pi}\ p!}{(2p+1)!} \Rightarrow C_{2p+2}^{\lambda}(0) = (-1)^{p+1}\frac{\Gamma(p+1+\lambda)}{(p+1)!\Gamma(\lambda)}$$

$$C_{2p}^{\lambda}(0) = (-1)^p\frac{\Gamma(p+\lambda)}{p!\Gamma(\lambda)} \Rightarrow \left\|C_{2p+1}^{\lambda}(z)\right\|^2 = (-1)^{p+1}\frac{\Gamma(p+1+\lambda)}{(2p+1+\lambda)p!\Gamma(\lambda)}\frac{\partial C_{2p+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} \quad or\ \Gamma\left(\frac{2p+3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2p+1)!}{2^{2p+1}p!}$$

$$V\acute{e}rification\ n=3\ ;\ \lambda=\frac{1}{2} \Rightarrow \left\|C_{2p+1}^{\lambda}(z)\right\|^2 = (-1)^{p+1}\frac{\Gamma\left(\frac{2p+3}{2}\right)}{\left(2p+\frac{3}{2}\right)p!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\partial C_{2p+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} = (-1)^{p+1}\frac{(2p+1)(2p)!}{(4p+3)2^{2p}(p!)^2}\frac{\partial C_{2p+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu}$$

On compare avec la formule connue de la norme des polynômes de Gegenbauer sur [-1,1] :

$$\left\|C_{2p+1}^{\lambda}(z)\right\|^2 = \int_0^1 dz\ \left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(C_{2p+1}^{\lambda}(z)\right)^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 dz\ \left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(C_{2p+1}^{\lambda}(z)\right)^2$$

$$\Rightarrow \left\|C_{2p+1}^{\lambda}(z)\right\|^2 = \frac{\pi\,\Gamma(2p+1+2\lambda)}{2^{2\lambda}(2p+1)!(2p+1+\lambda)(\Gamma(\lambda))^2} \Rightarrow (-1)^{p+1}\frac{\Gamma(p+1+\lambda)}{(2p+1+\lambda)p!\Gamma(\lambda)}\frac{\partial C_{2p+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} =$$

$$\frac{\pi\,\Gamma(2p+1+2\lambda)}{2^{2\lambda}(2p+1)!(2p+1+\lambda)(\Gamma(\lambda))^2} \Rightarrow \frac{\partial C_{2p+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} = (-1)^{p+1}\frac{\pi\ p!\Gamma(2p+1+2\lambda)}{2^{2\lambda}(2p+1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(p+1+\lambda)}$$

Comme par ailleurs :

$$\frac{\partial C_{2p+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} = (-1)^p\frac{\sqrt{\pi}\,p!\Gamma(2\lambda+1+2p)}{2^{2\lambda}(2p+1)!\Gamma(\lambda+1+p)\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}\frac{\partial C_1^{\lambda}(0)}{\partial \nu}$$

Il vient :

$$(-1)^{p+1}\frac{\pi\ p!\Gamma(2\lambda+1+2p)}{2^{2\lambda}(2p+1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+1+p)} = (-1)^p\frac{\sqrt{\pi}\,p!\Gamma(2\lambda+1+2p)}{2^{2\lambda}(2p+1)!\Gamma(\lambda+1+p)\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}\frac{\partial C_1^{\lambda}(0)}{\partial \nu}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_1^{\lambda}(0)}{\partial \nu} = -\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} = -\frac{\pi 2^{1-2\lambda}\,\Gamma(2\lambda)}{(\Gamma(\lambda))^2} \quad V\acute{e}rification\ n=3 \rightarrow 2\lambda=1 \quad \Gamma\left(\frac{2p+3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2p+1)!}{2^{2p+1}p!}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_1^{\frac{1}{2}}(0)}{\partial \nu} = -\frac{\pi\,\Gamma(1)}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} = -1 \qquad \frac{\partial C_{2p+1}^{\frac{1}{2}}(0)}{\partial \nu} = (-1)^{p+1}\frac{\sqrt{\pi}\ p!}{2\Gamma\left(\frac{2p+3}{2}\right)} = (-1)^{p+1}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

.

<u>Problème aux limites à l'intérieur d'un cône hyper-sphérique d'angle ouvert ϑ_0 bornée ou non radialement, condition aux limites constantes.</u>

Pour le problème sur le cône borné lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=T_0$ il vient :

$$B_n = T_0 \int_{\mu_0}^{1} dz\,(1-z^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{\nu_l}^{\lambda}(z) \quad \int dz\,(1-z^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} C_{\nu}^{\lambda}(z) = \frac{(1-z^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}}{\nu(\nu+2\lambda)}\left(\nu\, z\, C_{\nu}^{\lambda}(z) - (2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^{\lambda}(z)\right)$$

$$\Rightarrow \int_{\mu_0}^{1} dz\,(1-z^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{\nu_l}^{\lambda}(z) = \left[\frac{(1-z^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\left(\nu_l\, z\, C_{\nu_l}^{\lambda}(z) - (2\lambda-1+\nu_l)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(z)\right)\right]_{\mu_0}^{1} = \frac{(1-\mu_0{}^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}(2\lambda-1+\nu_l)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)} C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)$$

$$T(r,\theta) = -T_0 \sum_{l\neq 0,+\infty} \frac{(2\nu_l+2\lambda)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta)) \quad \nu_l \quad tq \quad C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)=0$$

Pour un problème du type suivant, il se décompose par principe de superposition en un problème sur un cône infini qui a la solution triviale T=T0 et du problème précédent.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta T(r,\theta)=0 \\ T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=0 \\ T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=T_0 \\ T(r,\theta)\ fini \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta T_c(r,\theta)=0 \\ T_c(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=T_0 \\ T_c(r,\theta)=T_0 \\ \to T_c(r,\theta)\big|_{r=l_r}=T_0 \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} \Delta T_{\Omega c}(r,\theta)=0 \\ T_{\Omega c}(r,\theta)\big|_{r=l_r}=T_0 \\ T_{\Omega c}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0 \\ T_{\Omega c}(r,\theta)\ fini \end{array}\right\}$$

Et dans ce cas la solution est immédiatement trouvée :

$$T(r,\theta) = T_0\left(1 + \sum_{l\neq 0,+\infty} \frac{(2\nu_l+2\lambda)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))\right) \qquad \nu_l \quad tq \quad C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)=0$$

Lorsque $\vartheta_0 = \pi/2$ sur le cône bornée, nul radialement et fixe sur la surface latérale du cône, on reprend la valeur de la dérivée paramétrique :

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad \mu_0 = 0 \quad \nu_l = 2p+1 \quad tq \quad C_{2p+1}^{\lambda}(0)=0 \quad \left.\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu_l=2p+1} = (-1)^{p+1}\frac{\pi\, p!\,\Gamma(2p+1+2\lambda)}{2^{2\lambda}(2p+1)!\,\Gamma(\lambda)\Gamma(p+1+\lambda)}$$

$$T(r,\theta) = T_0\left(1 - \frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)}{\pi}\sum_{l\neq 0,+\infty}(-1)^p\,\frac{2(2p+1+\lambda)(2p)!\,\Gamma(p+1+\lambda)}{p!\,\Gamma(2p+2+2\lambda)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p+1} C_{2p+1}^{\lambda}(Cos(\theta))\right)$$

$$C_{\nu}^{\lambda}(1) = \frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)} \Rightarrow C_{2p+1}^{\lambda}(1) = \frac{\Gamma(2p+1+2\lambda)}{(2p+1)!\,\Gamma(2\lambda)}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow T(r,0) = T_0\left(1 - \frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\sum_{l\neq 0,+\infty}(-1)^p\,\frac{2(2p+1+\lambda)\Gamma(p+1+\lambda)}{(2p+1)p!(2p+1+2\lambda)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p+1}\right)$$

C'est bien la solution trouvée auparavant pour une hémisphère à N-dimension, on écrivait:

$$T(r,\theta)=T_0\left(1-\frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}}\sum_{p=0}^{p=+\infty}\frac{2^{2p+1}(2p+1+\lambda)\Gamma(p+\lambda+1)}{\Gamma(2p+2+2\lambda)\Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p+1}C_{2p+1}^{\lambda}(Cos(\theta))\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1-2p}{2}\right)=\Gamma\left(1-\frac{1+2p}{2}\right)=-\frac{(1+2p)}{2}\Gamma\left(-\frac{1+2p}{2}\right)=(-1)^p\frac{2^{2p}\sqrt{\pi}\,p!}{(2p)!}$$

$$T(r,\theta)=T_0\left(1-\frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)}{\pi}\sum_{p=0}^{p=+\infty}(-1)^p\frac{2(2p+1+\lambda)(2p)!\Gamma(p+\lambda+1)}{p!\Gamma(2p+2+2\lambda)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2p+1}C_{2p+1}^{\lambda}(Cos(\theta))\right)$$

Pour le problème sur le cône non borné lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=T_0$ il vient :

$$T(r,\theta)=-T_0\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))\quad \nu_l\quad tq\quad C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)=0$$

.

Pour le problème lorsque $\vartheta_0=\pi/2$, sur le cône non bornée, nul radialement et fixe sur la surface latérale du cône,

$$\left.\begin{array}{l}\Delta T(r,\theta)=0\\ T(r,\theta)|_{r=l_r}=0\\ T(r,\theta)|_{\theta=\theta_0}=T_0\\ Lim_{r\to\infty}T(r,\theta)\ \ fini\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\Delta T_c(r,\theta)=0\\ T_c(r,\theta)|_{\theta=\theta_0}=T_0\\ T_c(r,\theta)=T_0\\ \to T_c(r,\theta)|_{r=l_r}=T\end{array}\right\}-\left.\begin{array}{l}\Delta T_{\Omega c}(r,\theta)=0\\ T_{\Omega c}(r,\theta)|_{r=l_r}=T_0\\ T_{\Omega c}(r,\theta)|_{\theta=\theta_0}=0\\ Lim_{r\to\infty}T_{\Omega c}(r,\theta)=0\end{array}\right\}$$

Et dans ce cas la solution est immédiatement trouvée :

$$T(r,\theta)=T_0\left(1+\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))\right)\qquad \nu_l\quad tq\quad C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)=0$$

Lorsque $\vartheta_0=\pi/2$ sur le cône non borné, nul radialement et fixe sur la surface latérale du cône, on reprend la valeur de la dérivée paramétrique :

$$\theta_0=\frac{\pi}{2}\quad \mu_0=0\quad \nu_l=2p+1\quad tq\quad C_{2p+1}^{\lambda}(0)=0\quad \left.\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(0)}{\partial\nu}\right|_{\nu_l=2p+1}=(-1)^{p+1}\frac{\pi\,p!\Gamma(2p+1+2\lambda)}{2^{2\lambda}(2p+1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(p+1+\lambda)}$$

$$T(r,\theta)=T_0\left(1-\frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)}{\pi}\sum_{l\neq 0,+\infty}(-1)^p\frac{2(2p+1+\lambda)(2p)!\Gamma(p+1+\lambda)}{p!\Gamma(2p+2+2\lambda)}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2p+1+2\lambda}C_{2p+1}^{\lambda}(Cos(\theta))\right)$$

$$C_\nu^\lambda(1)=\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)}\Rightarrow C_{2p+1}^{\lambda}(1)=\frac{\Gamma(2p+1+2\lambda)}{(2p+1)!\Gamma(2\lambda)}$$

$$\theta=0\Rightarrow T(r,0)=T_0\left(1-\frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\sum_{l\neq 0,+\infty}(-1)^p\frac{2(2p+1+\lambda)\Gamma(p+1+\lambda)}{(2p+1)p!(2p+1+2\lambda)}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2p+1+2\lambda}\right)$$

.

Partition de l'unité dans le cadre des problèmes aux limites sur l'hyper-sphère

Les deux solutions des problèmes de Dirichlet sur un cône borné ou non borné permettent d'écrire une formule de décomposition de l'unité sur le système des fonctions propres angulaires. Cette formule est particulièrement utile pour des calculs ultérieurs :

$$(1)\quad T(r,\theta) = -T_0 \sum_{l\neq 0,+\infty} \frac{(2\nu_l + 2\lambda)}{\nu_l(\nu_l + 2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

$$(2)\quad T(r,\theta) = -T_0 \sum_{l\neq 0,+\infty} \frac{(2\nu_l + 2\lambda)}{\nu_l(\nu_l + 2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}} \left(\frac{l_r}{r}\right)^{\nu_l + 2\lambda} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

$$T_0 = 1 \quad r = l_r \Rightarrow 1 = -\sum_{l\neq 0,+\infty} \frac{(2\nu_l + 2\lambda)}{\nu_l(\nu_l + 2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

$$Avec \ \left\| C_{\nu_l}^{\lambda}(z) \right\|^2 = -\frac{\left(1-\mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l + 2\lambda - 1)}{(2\nu_l + 2\lambda)} \frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu} C_{\nu_l - 1}^{\lambda}(\mu_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu} = -\left\| C_{\nu_l}^{\lambda}(z) \right\|^2 \frac{(2\nu_l + 2\lambda)}{\left(1-\mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l + 2\lambda - 1) C_{\nu_l - 1}^{\lambda}(\mu_0)}$$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{l\neq 0,+\infty} \frac{\left(1-\mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l + 2\lambda - 1) C_{\nu_l - 1}^{\lambda}(\mu_0)}{\nu_l(\nu_l + 2\lambda)\left\| C_{\nu_l}^{\lambda}(z) \right\|^2} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

Problème aux limites à l'intérieur d'un cône hyper-sphérique d'angle ouvert ϑ_0 non borné radialement avec des conditions inhomogènes de Dirichlet sur la surface latérale du cône.

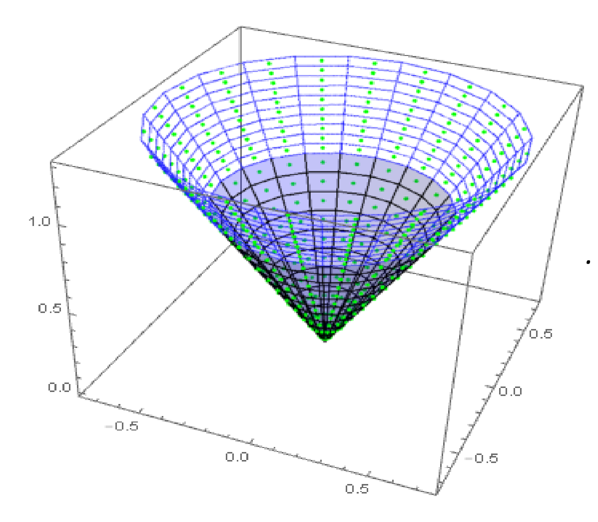
Soit sur le cône n-dimensionnel, le problème suivant :

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\big| / \vec{\mathbf{x}} \in C_{\Omega n} \quad r=\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$$

$$C_{\Omega n}=\left\{\vec{x} / x_1 \in [0,\infty[, \sum_{i=2}^{n} x_i^{\,2} \in \left[0, x_1^{\,2}\left(\frac{Sin(\vartheta_0)}{Cos(\vartheta_0)}\right)^2\right]\right\} \quad \partial C_{\Omega n}=\left\{\vec{x} / x_1 \in [0,\infty[, \sum_{i=2}^{n} x_i^{\,2} = x_1^{\,2}(Tan(\vartheta_0))^2\right\}$$

$$C.L. \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ r\in[0,l_r]}}=T_0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ r\in]l_r,+\infty[}}=0$$

Illustré par une figure en 3 dimensions :



Le problème de départ peut se décomposer ainsi :

$$T(r,\theta)=T_{\Omega 1}(r,\theta)+T_{\Omega 2}(r,\theta)$$

$$\Omega 1=\{0\le r<l_r, 0\le\theta<\theta_0\} \quad \Omega 2=\{l_r\le r<\infty, 0\le\theta<\theta_0\}$$

$$T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=T_0 \quad T_{\Omega 2}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0 \quad T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{r=l_r}=T_{\Omega 2}(r,\theta)\big|_{r=l_r}.$$

Le deuxième problème est un problème aux limites avec conditions homogènes qui a la solution formelle :

$$\nu_l \quad tq\ C^\lambda_{\nu_l}(\mu_0)=0 \quad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta)=-\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)}{\dfrac{\partial C^\lambda_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial\nu}}\frac{C_l}{\left(1-\mu_0^{\,2}\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)C^\lambda_{\nu_l-1}(\mu_0)}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda} C^\lambda_{\nu_l}(Cos(\theta)) \quad l_r\le r<\infty$$

Le premier problème se décompose encore en deux sous problèmes :

$$\left.\begin{array}{l}\Delta T_{\Omega 1}(r,\theta)=0\\ T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(\theta)\\ T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=T_0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\Delta T_{\Omega 11}(r,\theta)=0\\ T_{\Omega 11}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=T_0\\ T_{\Omega 11}(r,\theta)=T_0\\ \to T_{\Omega 11}(r,\theta)\big|_{r=l_r}=T_0\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{l}\Delta T_{\Omega 12}(r,\theta)=0\\ T_{\Omega 12}(r,\theta)\big|_{r=l_r}=T_0-f_\theta(\theta)\\ T_{\Omega 12}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0\\ T_{\Omega 12}(r,\theta)\ fini\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow T_{\Omega 1}(r,\theta)=T_0-T_{\Omega 12}(r,\theta)$$

On voit que $T_{\Omega 12}(r,\theta)$ *est solution du même problème aux limites homogène sur la surface du cône que* $T_{\Omega 1}(r,\theta)$*. La différence essentielle c'est que l'un est un problème extérieur et l'autre intérieur. Il vient donc la décomposition avec les même fonctions propres angulaires :*

$$\nu_l \quad tq\ C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)=0 \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$T_{\Omega 1}(r,\theta) = T_0 + \sum_{l\neq 0,+\infty} \frac{(2\nu_l+2\lambda)B_l}{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta)) \quad 0\le r\le l_r$$

Appliquons la décomposition de l'unité dans le système de fonctions propres angulaires, il vient :

$$1 = -\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta)) \Rightarrow T_{\Omega 1}(r,\theta) = -T_0\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta)) +$$

$$+\sum_{l\neq 0,+\infty} \frac{(2\nu_l+2\lambda)B_l}{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta)) \quad 0\le r\le l_r$$

$$T_{\Omega 1}(r,\theta) = \sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)}{\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}\left(-\frac{T_0}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)} + \frac{B_l}{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l}\right)C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta)) \quad 0\le r\le l_r$$

La condition de continuité des solutions et celle de continuité de la dérivée première radiale donnent immédiatement :

$$T_{\Omega 1}(r,\theta)\Big|_{r=l_r} = T_{\Omega 2}(r,\theta)\Big|_{r=l_r} \Rightarrow$$

$$-\frac{T_0}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)} + \frac{B_l}{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)} = -\frac{C_l}{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}$$

$$\frac{\partial T_{\Omega 1}(r,\theta)}{\partial r}\Bigg|_{r=l_r} = \frac{\partial T_{\Omega 2}(r,\theta)}{\partial r}\Bigg|_{r=l_r} \Rightarrow \frac{1}{l_r}\frac{\nu_l B_l}{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)} = \frac{1}{l_r}\frac{(\nu_l+2\lambda)C_l}{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}$$

$$\Rightarrow \nu_l B_n = (\nu_l+2\lambda)C_n$$

Ces deux conditions conduisent donc à un système d'équation linéaire des coefficients qui a la solution triviale :

$$\nu_l B_n = (\nu_l+2\lambda)C_l \Rightarrow \frac{T_0}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)} = \frac{2C_l}{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}\left(\frac{\nu_l+\lambda}{\nu_l}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{T_0}{(\nu_l+2\lambda)} = \frac{2C_l}{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}(\nu_l+\lambda) \Rightarrow C_l = T_0\frac{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}{2(\nu_l+2\lambda)(\nu_l+\lambda)}$$

$$B_l = \frac{\nu_l+2\lambda}{\nu_l}C_l \Rightarrow B_l = T_0\frac{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}{2\nu_l(\nu_l+\lambda)}$$

.

Ce qui donne bien les deux solutions une fois injectées ces valeurs des coefficients :

$\nu_l \quad tq\ C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)=0 \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$

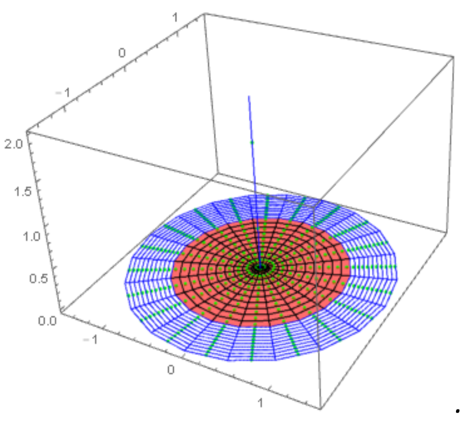
$$T_{\Omega 1}(r,\theta)=T_0\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)}{\nu_l\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}}\left(-\frac{1}{(\nu_l+2\lambda)}+\frac{1}{2(\nu_l+\lambda)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l}\right)C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta)) \quad 0\leq r\leq l_r$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta)=-T_0\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{1}{\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}(\nu_l+2\lambda)}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta)) \quad l_r\leq r<\infty$$

$$\Rightarrow\begin{cases}T_{\Omega 1}(r,\theta)=T_0\left(1+\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{1}{\nu_l\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l}C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))\right) & 0\leq r\leq l_r\\ T_{\Omega 2}(r,\theta)=-T_0\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{1}{(\nu_l+2\lambda)\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta)) & l_r\leq r<\infty\end{cases}$$

.

Regardons maintenant le comportement de cette solution lorsque l'angle d'ouverture du cône est π/2 :



.

Et essayons de trouver une forme simplifiée du profil de la solution selon l'axe x_1 ($\vartheta=0$) :

$$\mu_0 = 0\; C_{\nu_l}^{\lambda}(0) \Rightarrow \nu_l = 2l+1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{T_{\Omega 1}(r,\theta)}{T_0} = \left(1 + \displaystyle\sum_{l=0,+\infty} \frac{1}{(2l+1)\dfrac{\partial C_{2l+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu}} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{2l+1} C_{2l+1}^{\lambda}(Cos(\theta))\right) & 0 \le r \le l_r \\ \dfrac{T_{\Omega 2}(r,\theta)}{T_0} = -\displaystyle\sum_{l=0,+\infty} \frac{1}{(2l+1+2\lambda)\dfrac{\partial C_{2l+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu}} \left(\frac{l_r}{r}\right)^{2l+1+2\lambda} C_{2l+1}^{\lambda}(Cos(\theta)) & l_r \le r < \infty \end{cases}$$

$$\left\|C_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right\|^2 = -\frac{\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)}{(2\nu_l+2\lambda)} \frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu} C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0) \Rightarrow \left\|C_{2l+1}^{\lambda}(z)\right\|^2 = -\frac{(l+\lambda)}{(2l+1+\lambda)} \frac{\partial C_{2l+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} C_{2l}^{\lambda}(0)$$

$$De\ plus\ \left\|C_{2l+1}^{\lambda}(z)\right\|^2 = \frac{\pi\,\Gamma(2l+1+2\lambda)}{2^{2\lambda}(2l+1)!(2l+1+\lambda)(\Gamma(\lambda))^2} \Rightarrow \frac{\partial C_{2l+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} C_{2l}^{\lambda}(0) = -\frac{\pi\,\Gamma(2l+1+2\lambda)}{2^{2\lambda}(2l+1)!(\Gamma(\lambda))^2(l+\lambda)}$$

$$Cas\quad n=3 \quad \frac{\partial P_{2l+1}(0)}{\partial \nu} P_{2l}(0) = -\frac{2}{2^{2\lambda}(2l+1)} \Rightarrow (2l+1)\frac{\partial P_{2l+1}(0)}{\partial \nu} = -\frac{1}{P_{2l}(0)}$$

$$\frac{T_{\Omega 1}(r,\theta)}{T_0} = 1 + \sum_{l=0,+\infty} \frac{1}{(2l+1)\dfrac{\partial P_{2l+1}(0)}{\partial \nu}} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(Cos(\theta)) = 1 - \sum_{l=0,+\infty} P_{2l}(0)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(Cos(\theta))$$

$$\frac{T_{\Omega 2}(r,\theta)}{T_0} = -\sum_{l=0,+\infty} \frac{1}{(2l+2)\dfrac{\partial P_{2l+1}(0)}{\partial \nu}} \left(\frac{l_r}{r}\right)^{2l+2} P_{2l+1}(Cos(\theta)) = \sum_{l=0,+\infty} \frac{(2l+1)P_{2l}(0)}{(2l+2)} \left(\frac{l_r}{r}\right)^{2l+2} P_{2l+1}(Cos(\theta))$$

$$Continuité\ assurée\ par\ la\ partition\ de\ l'unité \quad 1 = \sum_{l=0,+\infty} \frac{(4l+3)P_{2l}(0)}{(2l+2)} P_{2l+1}(Cos(\theta))$$

$$\theta = 0 \Rightarrow P_{2l+1}(1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0} = 1 - \displaystyle\sum_{l=0,+\infty} P_{2l}(0)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2l+1} = 1 - \frac{r}{l_r}\sum_{l=0,+\infty} P_{2l}(0)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2l} \\ \dfrac{T_{\Omega 2}(r,\theta)}{T_0} = \displaystyle\sum_{l=0,+\infty} \frac{(2l+1)P_{2l}(0)}{(2l+2)}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2l+2} \end{cases}$$

Fonction génératrice des polynômes de Legendre

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tz}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(z) \Rightarrow \int_0^t dt \frac{t}{\sqrt{1+t^2-2tz}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{l+2}}{l+2} P_l(z)$$

$$\Rightarrow \int_0^t dt \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{1+t^2} - 1 \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{l+2}}{l+2} P_l(0) = \sqrt{1+t^2} - 1$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0,+\infty} \frac{(2l+1)t^{l+2}}{(2l+2)} P_{2l}(0) = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} - \left(\sqrt{1+t^2} - 1\right) = 1 + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(0) = \sum_{l=0}^{\infty} t^{2l} P_{2l}(0) \Rightarrow \frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0} = 1 - \frac{r}{l_r\sqrt{1+\left(\dfrac{r}{l_r}\right)^2}} = 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2+l_r^2}} \\ 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \displaystyle\sum_{l=0,+\infty} \frac{(2l+1)t^{l+2}}{(2l+2)} P_{2l}(0) \Rightarrow \frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{l_r}{r}\right)^2}} = 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2+l_r^2}} \end{cases}$$

.

A l'image de la simplification obtenue dans le cas à trois dimensions avec les polynômes de Legendre et l'utilisation de la fonction génératrice, voyons ce qui arrive avec les polynômes de Gegenbauer :

$$(2l+1)\frac{\partial C_{2l+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} = -\frac{\pi\,\Gamma(2l+1+2\lambda)}{2^{2\lambda}(2l)!(\Gamma(\lambda))^2(l+\lambda)C_{2l}^{\lambda}(0)} \quad C_{\nu}^{\lambda}(1) = \frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)} \Rightarrow C_{2l+1}^{\lambda}(1) = \frac{\Gamma(2l+1+2\lambda)}{(2l+1)!\Gamma(2\lambda)}$$

$$\frac{T_{\Omega 1}(r,\theta)}{T_0} = 1 - \frac{2^{2\lambda}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi}\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(2l)!(l+\lambda)C_{2l}^{\lambda}(0)}{\Gamma(2l+1+2\lambda)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2l+1} C_{2l+1}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

$$\theta = 0 \Rightarrow C_{2l+1}^{\lambda}(1) = \frac{\Gamma(2l+1+2\lambda)}{(2l+1)!\Gamma(2\lambda)} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0} = 1 - \dfrac{2^{2\lambda}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\displaystyle\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(l+\lambda)C_{2l}^{\lambda}(0)}{(2l+1)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2l+1} \\ \dfrac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0} = \dfrac{2^{2\lambda}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\displaystyle\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(l+\lambda)C_{2l}^{\lambda}(0)}{(2l+1+2\lambda)}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2l+1+2\lambda} \end{cases}$$

.

Voici quelques propriétés que l'on peut tirer des diverses fonctions génératrices des polynôme de Gegenbauer :

$$(1) \quad \frac{1}{(1+t^2-2tz)^{\lambda}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l C_l^{\lambda}(z) \quad |t|<1 \Rightarrow \frac{1}{(1+t^2)^{\lambda}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^{2l} C_{2l}^{\lambda}(0) \Rightarrow \frac{t}{(1+t^2)^{\lambda}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^{2l+1} C_{2l}^{\lambda}(0)$$

$$(2) \quad \frac{1-t^2}{(1+t^2-2tz)^{\lambda+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \frac{(\lambda+l)}{\lambda} C_l^{\lambda}(z) \quad |t|<1$$

$$(1)\Rightarrow(4) \quad \int_0^t \frac{dt}{(1+t^2-2tz)^{\lambda}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{l+1}}{l+1}C_l^{\lambda}(z) \quad (1)\Rightarrow \frac{t^{2\lambda}}{(1+t^2-2tz)^{\lambda}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^{l+2\lambda}C_l^{\lambda}(z)$$

$$\Rightarrow(5) \quad \int_0^t \frac{t^{2\lambda}dt}{(1+t^2-2tz)^{\lambda}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{l+2\lambda+1}}{l+2\lambda+1}C_l^{\lambda}(z) \Rightarrow (6) \quad \frac{t^{2\lambda+1}}{(1+t^2-2tz)^{\lambda}} - (\lambda+1)\int_0^t \frac{t^{2\lambda}dt}{(1+t^2-2tz)^{\lambda}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+\lambda)t^{l+2\lambda+1}C_l^{\lambda}(z)}{l+2\lambda+1}$$

$$(2) \quad \frac{1-t^2}{(1+t^2-2tz)^{\lambda+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l C_l^{\lambda}(z) + \frac{1}{\lambda}\sum_{l=0}^{\infty} l\,t^l C_l^{\lambda}(z) = \frac{1}{(1+t^2-2tz)^{\lambda}} + \frac{1}{\lambda}\sum_{l=0}^{\infty} l\,t^l C_l^{\lambda}(z)$$

$$\frac{1-t^2}{(1+t^2-2tz)^{\lambda+1}} - \frac{(1+t^2-2tz)}{(1+t^2-2tz)^{\lambda+1}} = \frac{1}{\lambda}\sum_{l=0}^{\infty} l\,t^l C_l^{\lambda}(z) \Rightarrow (7) \quad \frac{2t(z-t)}{(1+t^2-2tz)^{\lambda+1}} = \frac{1}{\lambda}\sum_{l=0}^{\infty} l\,t^l C_l^{\lambda}(z)$$

$$(3) \quad \frac{2t(z-t)\lambda}{(1+t^2-2tz)^{\lambda+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} l\,t^l C_l^{\lambda}(z) \quad valeur\ en\ z=0 \quad (4)\Rightarrow \int_0^t \frac{dt}{(1+t^2)^{\lambda}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{l+1}}{l+1}C_l^{\lambda}(0) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{2l+1}}{2l+1}C_{2l}^{\lambda}(0)$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+\lambda}{2l+1}t^{2l+1}C_{2l}^{\lambda}(0) = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty} t^{2l+1}C_{2l}^{\lambda}(0) + \left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{2l+1}}{2l+1}C_{2l}^{\lambda}(0)$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+\lambda}{2l+1}t^{2l+1}C_{2l}^{\lambda}(0) = \frac{t}{2(1+t^2)^{\lambda}} + \left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{dt}{(1+t^2)^{\lambda}}$$

$$(5)\Rightarrow \int_0^t \frac{t^{2\lambda}dt}{(1+t^2)^{\lambda}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{2l+2\lambda+1}}{2l+2\lambda+1}C_{2l}^{\lambda}(0) \quad (6)\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{t^{2\lambda+1}}{(1+t^2)^{\lambda}} - \int_0^t \frac{t^{2\lambda}dt}{(1+t^2)^{\lambda}}\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+\lambda)t^{l+2\lambda+1}}{2l+2\lambda+1}C_l^{\lambda}(z)$$

$$\int_0^t \frac{dt}{(1+t^2)^{\lambda}} = t\times {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};-t^2\right) \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+\lambda}{2l+1}t^{2l+1}C_{2l}^{\lambda}(0) = t\left[\frac{1}{2(1+t^2)^{\lambda}} + \left(\lambda-\frac{1}{2}\right){}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};-t^2\right)\right]$$

.

Quelques exemples de séries infinies suivant les dimensions pour la solution du domaine Ω1 :

$$F_{\Omega 1}(t)=1-\frac{2^{2\lambda}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+\lambda}{2l+1}t^{2l+1}C_{2l}^{\lambda}(0)=1-\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\left(\frac{t}{(1+t^2)^{\lambda}}+(2\lambda-1)\int_0^t\frac{dt}{(1+t^2)^{\lambda}}\right)$$

$$\int_0^t\frac{dt}{(1+t^2)^{\lambda}}={}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};-t^2\right)-{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};0\right)\quad {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};0\right)=0$$

$$\Rightarrow F_{\Omega 1}(t,\lambda)=1-\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}t\left[\frac{1}{(1+t^2)^{\lambda}}+(2\lambda-1)\;{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};-t^2\right)\right]$$

$$n=3;\,\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow F_{\Omega 1}(t,\lambda)=1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\qquad n=4;\,\lambda=1\Rightarrow F_{\Omega 1}(t,\lambda)=1-\frac{2}{\pi}\left(\frac{t}{1+t^2}+ArcTan(t)\right)$$

$$n=5;\,\lambda=\frac{3}{2}\Rightarrow F_{\Omega 1}(t,\lambda)=1-\frac{t(3+2t^2)}{2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad n=6;\,\lambda=2\Rightarrow F_{\Omega 1}(t,\lambda)=1-\frac{2}{3\pi}\left(\frac{t(5+3t^2)}{(1+t^2)^2}+3ArcTan(t)\right)$$

$$n=7;\,\lambda=\frac{5}{2}\Rightarrow F_{\Omega 1}(t,\lambda)=1-\frac{t(15+20t^2+8t^4)}{8(1+t^2)^{\frac{5}{2}}}$$

.

Quelques exemples de séries infinies suivant les dimensions pour la solution du domaine Ω2 :

$$\tau=\frac{1}{t}\Rightarrow F_{\Omega 2}(\tau)=\frac{2^{2\lambda}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+\lambda)\tau^{l+2\lambda+1}}{2l+2\lambda+1}C_l^{\lambda}(z)=\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\left(\frac{\tau^{2\lambda+1}}{(1+\tau^2)^{\lambda}}-\int_0^{\tau}\frac{t^{2\lambda}dt}{(1+t^2)^{\lambda}}\right)$$

$$\Rightarrow F_{\Omega 2}(\tau)=\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\left(\frac{\tau^{2\lambda+1}}{(1+\tau^2)^{\lambda}}-\frac{\tau^{2\lambda+1}\,{}_2F_1\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2},\lambda+\frac{3}{2};-\tau^2\right)}{2\lambda+1}+\frac{\lim\limits_{\tau\to 0}\tau^{2\lambda+1}\,{}_2F_1\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2},\lambda+\frac{3}{2};-\tau^2\right)}{2\lambda+1}\right)$$

$$En\ effet\ \lim_{\tau\to 0}\tau^{2\lambda+1}\,{}_2F_1\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2},\lambda+\frac{3}{2};-\tau^2\right)\neq 0$$

$$n=3;\,\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow F_{\Omega 2}(\tau)=1-\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\qquad n=4;\,\lambda=1\Rightarrow F_{\Omega 2}(\tau)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\tau}{1+\tau^2}+ArcTan(\tau)\right)$$

$$n=5;\,\lambda=\frac{3}{2}\Rightarrow F_{\Omega 2}(\tau)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{\tau^4}{(1+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2\tau^2}{(1+\tau^2)^{\frac{1}{2}}}\right)=1-\frac{\tau^2(2+\tau^2)}{2(1+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$n=6;\,\lambda=2\Rightarrow F_{\Omega 2}(\tau)=\frac{2}{3\pi}\left(-\frac{\tau(3+5\tau^2)}{(1+\tau^2)^2}+3ArcTan(\tau)\right)$$

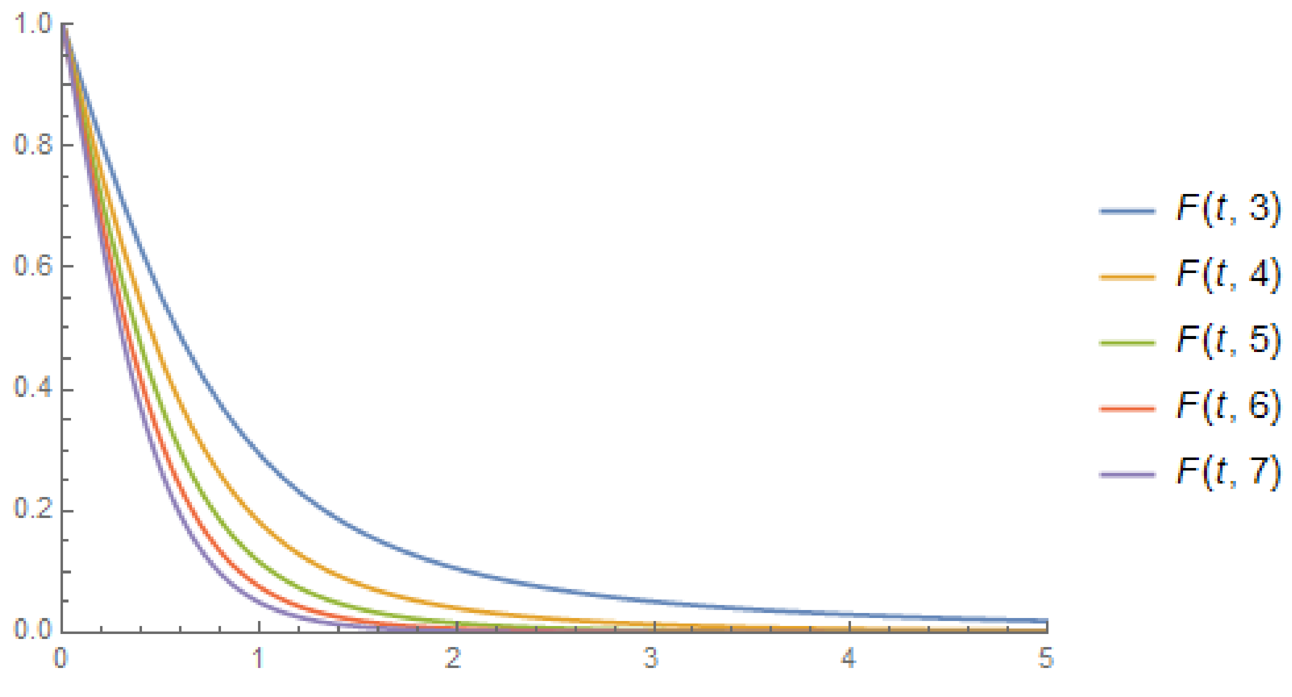
$$n=7;\,\lambda=\frac{5}{2}\Rightarrow F_{\Omega 2}(\tau)=\left(\frac{8}{3}+\frac{3}{8}\frac{\tau^6}{(1+\tau^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{8+12\tau^2+3\tau^4}{8(1+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=1-\frac{8+20\tau^2+15\tau^4}{8(1+\tau^2)^{\frac{5}{2}}}$$

.

Les profils de solution sur l'axe x_1 pour les domaines Ω1 et Ω2 :

$$\Rightarrow \frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0} = F_{\Omega 1}\left(\frac{r}{l_r},\lambda\right) \qquad 0 \le \frac{r}{l_r} \le 1 \qquad \frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0} = F_{\Omega 1}\left(\frac{l_r}{r},\lambda\right) \qquad 1 \le \frac{r}{l_r} \le \infty$$

Le graphe du profil pour les diverses dimensions se présente ainsi :



.

Exemple : *continuons dans la foulée de cet exemple, pour prendre en considération le problème suivant, qui cette fois possède trois zones de décomposition distinctes :*

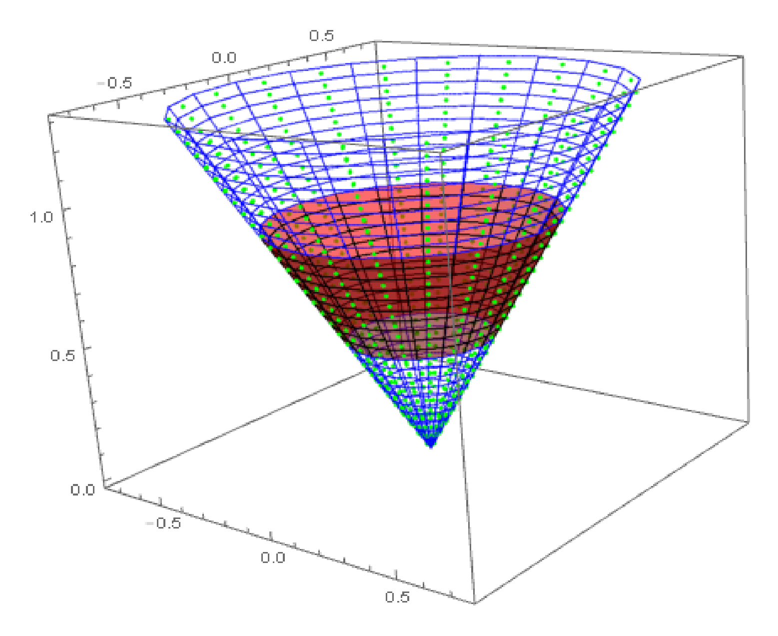
Soit sur le cône n-dimensionnel, le problème suivant :

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\big|/\vec{\mathbf{x}}\in C_{\Omega n} \quad r=\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}$$

$$C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}/x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}{x_i}^2\in\left[0,{x_1}^2\left(\frac{Sin(\vartheta_0)}{Cos(\vartheta_0)}\right)^2\right]\right\} \quad \partial C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}/x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}{x_i}^2={x_1}^2(Tan(\vartheta_0))^2\right\}$$

$$C.L.\quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[0,l_{r1}]}}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}}=T_0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r2},+\infty]}}=0$$

Illustré par une figure en 3 dimensions :



Problème qui décompose en trois sous-problèmes :

$$T(r,\theta)=T_{\Omega 1}(r,\theta)+T_{\Omega 2}(r,\theta)+T_{\Omega 3}(r,\theta)$$

qui sont définis par les conditions aux limites suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\Delta T_{\Omega 1}(r,\theta)=0\\ T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=T_{\Omega 2}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}\Leftrightarrow T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=T_{\Omega 2h}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}+T_0\\ T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[0,l_{r1}]}}=0\end{array}\right\}+$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta T_{\Omega 2}(r,\theta)=0\rightarrow T_{\Omega 2}=T_0+T_{\Omega 2h}\\ T_{\Omega 2}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}\Leftrightarrow T_{\Omega 2h}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}-T_0\\ T_{\Omega 2}(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}}=0\end{array}\right\}+$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta T_{\Omega 3}(r,\theta)=0\\ T_{\Omega 3}(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=T_{\Omega 2}(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}\Leftrightarrow T_{\Omega 2h}(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=T_{\Omega 3}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}-T_0\\ T_{\Omega 3}(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r2},+\infty]}}=0\end{array}\right\}$$

Auquel il faudra également appliquer les conditions de continuité C_0 et C_1

$$T_{\Omega 1}(r,\theta)\Big|_{r=l_{r1}} = T_{\Omega 2}(r,\theta)\Big|_{r=l_{r1}} \quad T_{\Omega 2}(r,\theta)\Big|_{r=l_{r2}} = T_{\Omega 3}(r,\theta)\Big|_{r=l_{r2}}$$

$$\left.\frac{\partial T_{\Omega 1}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=l_{r1}} = \left.\frac{\partial T_{\Omega 2}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=l_{r1}} \quad \left.\frac{\partial T_{\Omega 2}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=l_{r2}} = \left.\frac{\partial T_{\Omega 3}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=l_{r2}}.$$

Pour le problème central on fait intervenir deux fonctions limites au rayon inférieur et supérieur, et l'on introduit la partition de l'unité en série de fonctions propres angulaires. Les solutions formelles des trois problèmes sont donc les suivantes :

$$\nu_l \ tq\ C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0) = 0 \quad \mu_0 = Cos(\theta_0) \quad z = Cos(\theta)$$

$$T_{\Omega 1}(r,\theta) = -\sum_{l\neq 0,+\infty} \frac{(2\nu_l + 2\lambda)}{\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}} \left(\frac{A_l}{\left(1-\mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} (\nu_l + 2\lambda - 1) C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)} \left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} \right) C_{\nu_l}^{\lambda}\left(Cos(\theta)\right) \quad 0 \le r \le l_{r1}$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta) = -\sum_{l\neq 0,+\infty} \frac{(2\nu_l + 2\lambda)}{\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}} \left(\begin{array}{l} \dfrac{T_0}{\nu_l(\nu_l + 2\lambda)} + \dfrac{B_l}{\left(1-\mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} (\nu_l + 2\lambda - 1) C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)} \dfrac{\left(\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)} + \\ + \dfrac{C_l}{\left(1-\mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} (\nu_l + 2\lambda - 1) C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)} \dfrac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)} \end{array} \right) C_{\nu_l}^{\lambda}\left(Cos(\theta)\right)$$

$$T_{\Omega 3}(r,\theta) = -\sum_{l\neq 0,+\infty} \frac{(2\nu_l + 2\lambda)}{\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}} \left(\frac{D_l}{\left(1-\mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} (\nu_l + 2\lambda - 1) C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)} \left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda} \right) C_{\nu_l}^{\lambda}\left(Cos(\theta)\right)$$

Bn et Cn représente les contributions respectives des conditions aux limites inhomogènes en lr1 et lr2. En appliquant les conditions de continuité, on obtient deux équations linéaires :

$$\frac{P_{\nu_l-1}(\mu_0)}{(\nu_l+1)} \Leftrightarrow \frac{\left(1-\mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} (\nu_l + 2\lambda - 1) C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}{\nu_l(\nu_l + 2\lambda)} \Rightarrow \begin{cases} A_l = T_0 \dfrac{\left(1-\mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} (\nu_l + 2\lambda - 1) C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}{\nu_l(\nu_l + 2\lambda)} + B_l \\ D_l = T_0 \dfrac{\left(1-\mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} (\nu_l + 2\lambda - 1) C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}{\nu_l(\nu_l + 2\lambda)} + C_l \end{cases}$$

$$14\ 2\ 43_{n=3}$$

$$Posons \quad U = T_0 \frac{\left(1-\mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} (\nu_l + 2\lambda - 1) C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}{\nu_l(\nu_l + 2\lambda)} \Rightarrow \begin{cases} A_l = U + B_l \\ D_l = U + C_l \end{cases}$$

.

Les conditions de continuité de la dérivée donne des équations sensiblement plus compliquées, pour cela il faut écrire les dérivées suivantes :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}\Bigg|_{r=l_{r1}} = \frac{\nu_l}{l_{r1}} \qquad \frac{d}{dr}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\Bigg|_{r=l_{r1}} = -\frac{\nu_l+2\lambda}{l_{r1}}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\Bigg|_{r=l_{r2}} = \frac{\nu_l}{l_{r2}} \qquad \frac{d}{dr}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\Bigg|_{r=l_{r2}} = -\frac{\nu_l+2\lambda}{l_{r2}}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}\Bigg|_{r=l_{r2}} = \frac{\nu_l}{l_{r2}}\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} \qquad \frac{d}{dr}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\Bigg|_{r=l_{r2}} = -\frac{\nu_l+2\lambda}{l_{r2}}\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\Bigg|_{r=l_{r1}} = \frac{\nu_l}{l_{r1}}\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} \qquad \frac{d}{dr}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\Bigg|_{r=l_{r1}} = -\frac{\nu_l+2\lambda}{l_{r1}}\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}.$$

Ce qui donne les équations suivantes :

$$\nu_l A_l = \frac{\left(\nu_l\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} + (\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)B_l}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)} + \frac{(2\nu_l+2\lambda)C_l}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}$$

$$-(\nu_l+2\lambda)D_l = \frac{(2\nu_l+2\lambda)B_l}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)} + \frac{\left(\nu_l\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} + (\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)C_l}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}$$

$$\Rightarrow -(\nu_l+2\lambda)D_l = -(\nu_l+2\lambda)C_l + \frac{(2\nu_l+2\lambda)B_l}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)} + \frac{(2\nu_l+2\lambda)C_l\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}$$

que l'on peut légèrement simplifier :

$$\nu_l A_l = \nu_l B_l + \frac{(2\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda} B_l}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)} + \frac{(2\nu_l+2\lambda)C_l}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}$$

$$-(\nu_l+2\lambda)D_l = -(\nu_l+2\lambda)C_l + \frac{(2\nu_l+2\lambda)B_l}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)} + \frac{(2\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} C_l}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}$$

Ce qui donne :

$A_l - B_l = U \quad et \quad D_l - C_l = U$

$$\nu_l U = \frac{(2\nu_l + 2\lambda)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l + 2\lambda} B_l}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l + 2\lambda}\right)} + \frac{(2\nu_l + 2\lambda) C_l}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l + 2\lambda}\right)}$$

$$-(\nu_l + 2\lambda) U = \frac{(2\nu_l + 2\lambda) B_l}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l + 2\lambda}\right)} + \frac{(2\nu_l + 2\lambda)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} C_l}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l + 2\lambda}\right)}$$

Posons :

$$U = T_0 \frac{\left(1 - \mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda - 1}{2}} (\nu_l + 2\lambda - 1) C_{\nu_l - 1}^{\lambda}(\mu_0)}{\nu_l (\nu_l + 2\lambda)} \quad B'_l = \frac{B_l}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l + 2\lambda}\right)} \quad C'_l = \frac{C_l}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l + 2\lambda}\right)}$$

(1) $A_l - B_l = U$

(2) $D_l - C_l = U$

(3) $(2\nu_l + 2\lambda)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l + 2\lambda} B'_l + (2\nu_l + 2\lambda) C'_l = \nu_l U$

(4) $(2\nu_l + 2\lambda) B'_l + (2\nu_l + 2\lambda)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} C'_l = -(\nu_l + 2\lambda) U$

.

Et l'inversion du système final sur Bn et Cn donne :

$$U = T_0 \frac{\left(1 - \mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda - 1}{2}} (\nu_l + 2\lambda - 1) C_{\nu_l - 1}^{\lambda}(\mu_0)}{\nu_l (\nu_l + 2\lambda)} \quad B'_l = \frac{B_l}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l + 2\lambda}\right)} \quad C'_l = \frac{C_l}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l + 2\lambda}\right)}$$

(1) $A_l - B_l = U$

(2) $D_l - C_l = U$

(3) $\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l + 2\lambda} B'_l + C'_l = \frac{\nu_l U}{(2\nu_l + 2\lambda)}$

(4) $B'_l + \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} C'_l = -\frac{(\nu_l + 2\lambda) U}{(2\nu_l + 2\lambda)}$

$$B'_l = -\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} C'_l - \frac{(\nu_l + 2\lambda) U}{(2\nu_l + 2\lambda)} = -\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}\left(\frac{\nu_l U}{(2\nu_l + 2\lambda)} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l + 2\lambda} B'_l\right) - \frac{(\nu_l + 2\lambda) U}{(2\nu_l + 2\lambda)}$$

$$\Rightarrow B'_l \left(1 - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2\nu_l + 2\lambda}\right) = -\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} \frac{\nu_l U}{(2\nu_l + 2\lambda)} - \frac{(\nu_l + 2\lambda) U}{(2\nu_l + 2\lambda)} = -\frac{U}{(2\nu_l + 2\lambda)}\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} \nu_l + (\nu_l + 2\lambda)\right)$$

Soit :

$$B'_l = -\frac{U\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}\nu_l + \nu_l + 2\lambda\right)}{(2\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)} = -\frac{U\left(\lambda_n + (\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\right)}{(2\nu_l+2\lambda)\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}$$

$$C'_l = -\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda} B'_n + \frac{\lambda_n U}{(2\nu_l+2\lambda)} = \frac{U\left(\nu_l + (\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\right)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}}{(2\nu_l+2\lambda)\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)} + \frac{\nu_l U}{(2\lambda_n+1)}$$

$$C'_l = -\frac{U\left(\nu_l\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} + (\nu_l+2\lambda)\right)}{(2\nu_l+2\lambda)\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)} + \frac{\nu_l U\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}{(2\nu_l+2\lambda)\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}$$

$$C'_l = -\frac{U}{(2\nu_l+2\lambda)\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}\left(\nu_l + 2\lambda + \nu_l\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right).$$

En revenant aux coefficients initiaux A_l, B_l, C_l, D_l :

$$B_l = -\frac{U\left(\nu_l + (\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\right)}{(2\nu_l+2\lambda)} \qquad C_l = -\frac{U\left(\nu_l + 2\lambda + \nu_l\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}{(2\nu_l+2\lambda)}$$

$$A_l = U + B_l = \frac{U(\nu_l+2\lambda)}{(2\nu_l+2\lambda)}\left(1 - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\right) \qquad D_l = U + C_l = \frac{U\nu_l}{(2\nu_l+2\lambda)}\left(1 - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right).$$

Ce qui donne finalement les solutions :

$$\nu_l \ tq \ C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)=0 \quad \mu_0=Cos(\theta_0) \quad z=Cos(\theta)$$

$$U=T_0\frac{\left(1-\mu_0^{\ 2}\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)C^{\lambda}_{\nu_l-1}(\mu_0)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\Leftrightarrow\left(1-\mu_0^{\ 2}\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)C^{\lambda}_{\nu_l-1}(\mu_0)=\nu_l(\nu_l+2\lambda)\frac{U}{T_0}$$

$$T_{\Omega 1}(r,\theta)=-T_0\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{1}{\nu_l\frac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial\nu}}\left(1-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\right)\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta)) \quad 0\leq r\leq l_{r1}$$

$$Comme \quad 1=-\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\frac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial\nu}}C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))\Rightarrow$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta)=T_0+T_0\sum_{l\neq 0,+\infty}\left(\begin{array}{l}\frac{\left(\nu_l+(\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\right)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\frac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial\nu}}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}+\\+\frac{\left(\nu_l+2\lambda+\nu_l\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\frac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial\nu}}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}\end{array}\right)C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))$$

$$T_{\Omega 3}(r,\theta)=-T_0\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{1}{(\nu_l+2\lambda)\frac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial\nu}}\left(1-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))$$

On peut tenter de simplifier l'expression de la solution sur le domaine :

$$Or\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)=-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2\lambda}\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)\Leftrightarrow\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)=-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2\lambda}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta)=T_0+T_0\sum_{l\neq 0,+\infty}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\left(\nu_l+(\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\right)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}\dfrac{\left(\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}+\\-\dfrac{\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{-2\lambda}\left(\nu_l+2\lambda+\nu_l\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}\dfrac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}\end{array}\right)C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta)=T_0+T_0\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}\times$$

$$\left(\left(\nu_l+(\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\right)\left(\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)-\left(\nu_l+2\lambda+\nu_l\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2\lambda}\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)\right)$$

L'expression

$$\left(\left(\nu_l+(\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\right)\left(\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)-\left(\nu_l+2\lambda+\nu_l\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2\lambda}\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)\right)$$

$$=\left(\begin{array}{l}\nu_l\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}+(\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-\nu_l\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}-(\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\\-(\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2\lambda}\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\nu_l\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2\lambda}\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}+(\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2\lambda}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}+\nu_l\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2\lambda}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{l}(\nu_l+2\lambda)\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-(\nu_l+2\lambda)\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}+\nu_l\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-\nu_l\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\\+\nu_l\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}-\nu_l\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}-(\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}+(\nu_l+2\lambda)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\end{array}\right)$$

$$=\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)\left((\nu_l+2\lambda)\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}+\nu_l\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow T_{\Omega 2}(r,\theta)=T_0+T_0\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{\left((\nu_l+2\lambda)\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}+\nu_l\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}$$

.

Résumons pour le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T(r,\theta)\Big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[0,l_{r1}]}}=0\quad T(r,\theta)\Big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}}=T_0\quad T(r,\theta)\Big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r2},+\infty]}}=0$$

$$\Omega_1=[0,\theta_0]\times[0,l_{r1}]\quad \Omega_2=[0,\theta_0]\times[l_{r1},l_{r2}]\quad \Omega_3=[0,\theta_0]\times[l_{r2},+\infty].$$

Le résultat trouvé pour les solutions dans les trois sous-domaines du cône sphérique :

$$\nu_l\ tq\ C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)=0\quad \mu_0=Cos(\theta_0)\quad z=Cos(\theta)$$

$$T_{\Omega1}(r,\theta)=-T_0\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{1}{\nu_l\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}\right)C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))\quad 0\le r\le l_{r1}$$

$$T_{\Omega2}(r,\theta)=T_0+T_0\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{\left((\nu_l+2\lambda)\left(\dfrac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}+\nu_l\left(\dfrac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}\quad l_{r1}\le r\le l_{r2}$$

$$T_{\Omega3}(r,\theta)=-T_0\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{1}{(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}\left(\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))\quad l_{r2}\le r\le+\infty$$

.

Les expressions vérifient bien la condition de continuité :

$$\frac{T_{\Omega1}(l_{r1},\theta)}{T_0}=\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{1}{\nu_l\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-1\right)C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

$$\frac{T_{\Omega2}(l_{r1},\theta)}{T_0}=1+\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{\left((\nu_l+2\lambda)\left(\dfrac{r}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}+\nu_l\right)C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}\Leftarrow 1=-\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

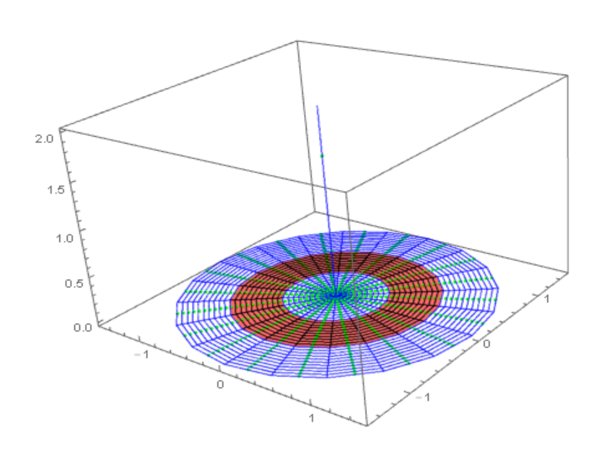
$$\frac{T_{\Omega2}(l_{r1},\theta)}{T_0}=\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{(\nu_l+2\lambda)\left(\left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-1\right)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))=\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{\left(\left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l}-1\right)}{\nu_l\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

$$\frac{T_{\Omega2}(l_{r2},\theta)}{T_0}=-\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))+\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{\left((\nu_l+2\lambda)+\nu_l\left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}$$

$$\frac{T_{\Omega2}(l_{r2},\theta)}{T_0}=\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}\left(\nu_l\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}-\nu_l\right)=\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))}{(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}-1\right)$$

$$\frac{T_{\Omega3}(r,\theta)}{T_0}=\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{1}{(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}-1\right)C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

Pour un cône d'angle ouvert ϑ0 = π/2 :



La solution se présente comme suit :

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mu_0 = Cos(\theta_0) = 0 \quad \nu_l \ tq \ C_{\nu_l}^{\lambda}(0) = 0 \Rightarrow \nu_l = 2l+1 \quad z = Cos(\theta)$$

$$T_{\Omega 1}(r,\theta) = -T_0 \sum_{l \neq 0,+\infty} \frac{1}{(2l+1)\frac{\partial C_{2l+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu}} \left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2l+1} - \left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{2l+1} \right) C_{2l+1}^{\lambda}(Cos(\theta)) \quad 0 \leq r \leq l_{r1}$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta) = T_0 + T_0 \sum_{l \neq 0,+\infty} \frac{\left((2l+1+2\lambda)\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{2l+1} + (2l+1)\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda} \right) C_{2l+1}^{\lambda}(Cos(\theta))}{(2l+1+2\lambda)(2l+1)\frac{\partial C_{2l+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu}} \quad l_{r1} \leq r \leq l_{r2}$$

$$T_{\Omega 3}(r,\theta) = -T_0 \sum_{l \neq 0,+\infty} \frac{1}{(2l+1+2\lambda)\frac{\partial C_{2l+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu}} \left(\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{2l+1+2\lambda} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2l+1+2\lambda} \right) C_{2l+1}^{\lambda}(Cos(\theta)) \quad l_{r2} \leq r \leq +\infty$$

Et nous cherchons à établir le profil sur l'axe x_1 soit en ϑ=0 :

$$Comme \quad C_{2l+1}^{\lambda}(1) = \frac{\Gamma(2l+1+2\lambda)}{(2l+1)!\Gamma(2\lambda)} \quad et \quad (2l+1)\frac{\partial C_{2l+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} = -\frac{\pi\,\Gamma(2l+1+2\lambda)}{2^{2\lambda}(2l)!(\Gamma(\lambda))^2(l+\lambda)C_{2l}^{\lambda}(0)}$$

$$\Rightarrow \frac{C_{2l+1}^{\lambda}(1)}{(2l+1)\frac{\partial C_{2l+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu}} = -\frac{2^{2\lambda}(\Gamma(\lambda))^2(l+\lambda)C_{2l}^{\lambda}(0)}{\pi(2l+1)\Gamma(2\lambda)}$$

$$\frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0} = \frac{2^{2\lambda}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)} \sum_{l \neq 0,+\infty} \frac{(l+\lambda)C_{2l}^{\lambda}(0)}{(2l+1)} \left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2l+1} - \left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{2l+1} \right) \quad 0 \leq r \leq l_{r1}$$

$$\frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0} = 1 - \frac{2^{2\lambda}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)} \sum_{l \neq 0,+\infty} \frac{(l+\lambda)C_{2l}^{\lambda}(0)\left((2l+1+2\lambda)\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{2l+1} + (2l+1)\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2l+1+2\lambda} \right)}{(2l+1+2\lambda)(2l+1)} \quad l_{r1} \leq r \leq l_{r2}$$

$$\frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0} = 1 - \frac{2^{2\lambda}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)} \sum_{l \neq 0,+\infty} C_{2l}^{\lambda}(0) \left(\frac{(l+\lambda)}{(2l+1)}\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{2l+1} + \frac{(l+\lambda)}{(2l+1+2\lambda)}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2l+1+2\lambda} \right) \quad l_{r1} \leq r \leq l_{r2}$$

$$\frac{T_{\Omega 3}(r,0)}{T_0} = \frac{2^{2\lambda}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)} \sum_{l \neq 0,+\infty} \frac{(l+\lambda)C_{2l}^{\lambda}(0)}{(2l+1+2\lambda)} \left(\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{2l+1+2\lambda} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2l+1+2\lambda} \right) \quad l_{r2} \leq r \leq +\infty$$

On aboutit pour les trois domaines Ω_1, Ω_2 et Ω_3 à des expressions plus simples sur l'axe x_1, toute tendant vers 0 lorsque r=0 ou r=∞ :

$$\text{Posons}\quad F_{\Omega 1}(t)=\frac{2^{2\lambda}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+\lambda}{2l+1}t^{2l+1}C_{2l}^{\lambda}(0)=\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\left(\frac{t}{\left(1+t^2\right)^{\lambda}}+(2\lambda-1)\int_0^t\frac{d\tau}{\left(1+\tau^2\right)^{\lambda}}\right)$$

$$F_{\Omega 3}(t)=\frac{2^{2\lambda}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+\lambda)}{2l+2\lambda+1}t^{2l+2\lambda+1}C_{2l}^{\lambda}(0)=\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\left(\frac{t^{2\lambda+1}}{\left(1+t^2\right)^{\lambda}}-\int_0^t\frac{\tau^{2\lambda}d\tau}{\left(1+\tau^2\right)^{\lambda}}\right)$$

$$\frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0}=F_{\Omega 1}\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)-F_{\Omega 1}\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)\quad \frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0}=1-F_{\Omega 1}\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)-F_{\Omega 3}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)\quad \frac{T_{\Omega 3}(r,0)}{T_0}=F_{\Omega 3}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)-F_{\Omega 3}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)$$

$$n=3\,;\,\lambda=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 3}(r,0)}{T_0}=\frac{r}{\sqrt{l_{r1}^2+r^2}}-\frac{r}{\sqrt{l_{r2}^2+r^2}}$$

$$n=4\,;\,\lambda=1\rightarrow\frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 3}(r,0)}{T_0}=\frac{2}{\pi}\left(r\left(\frac{l_{r1}}{l_{r1}^2+r^2}-\frac{l_{r2}}{l_{r2}^2+r^2}\right)+Arctan\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)-Arctan\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)\right)$$

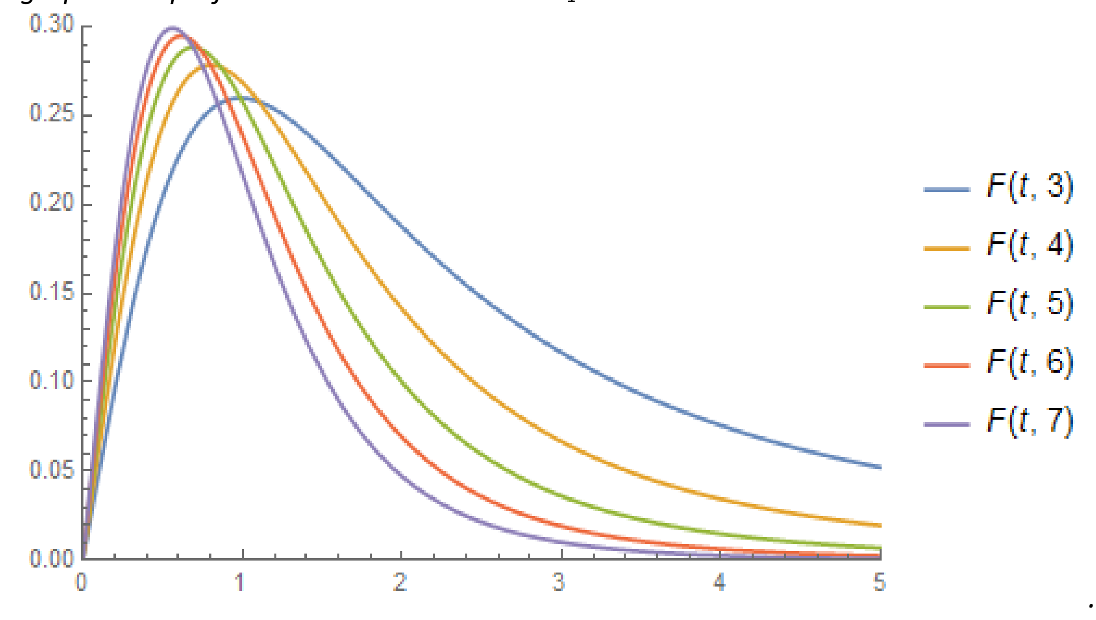
$$n=5\,;\,\lambda=\frac{3}{2}\rightarrow\frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 3}(r,0)}{T_0}=\frac{r\left(2r^2+3l_{r1}^2\right)}{2\left(l_{r1}^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{r\left(2r^2+3l_{r2}^2\right)}{2\left(l_{r2}^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$n=6\,;\,\lambda=2\rightarrow\frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 3}(r,0)}{T_0}=$$

$$=\frac{2}{3\pi}\left(\frac{rl_{r1}\left(3r^2+5l_{r1}^2\right)}{\left(l_{r1}^2+r^2\right)^2}-\frac{rl_{r2}\left(3r^2+5l_{r2}^2\right)}{\left(l_{r2}^2+r^2\right)^2}+3\left[Arctan\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)-Arctan\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)\right]\right)$$

$$n=7\,;\,\lambda=\frac{3}{2}\rightarrow\frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 3}(r,0)}{T_0}=\frac{r\left(8r^4+20r^2l_{r1}^2+15l_{r1}^4\right)}{8\left(l_{r1}^2+r^2\right)^{\frac{5}{2}}}-\frac{r\left(8r^4+20r^2l_{r2}^2+15l_{r2}^4\right)}{8\left(l_{r2}^2+r^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Voici le graphe des profils de la solution sur l'axe x_1 suivant diverses dimensions :



.

Étant donnée la forme de la dérivée première des trois fonctions introduites, on en déduit la position du maximum de la fonction profil, comme fonction de l1,l2 et λ :

$$F_{\Omega 1}(t)=\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\left(\frac{t}{(1+t^2)^{\lambda}}+(2\lambda-1)\int_0^t\frac{d\tau}{(1+\tau^2)^{\lambda}}\right)\Rightarrow F_{\Omega 1}'(t)=\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\frac{2\lambda}{(1+t^2)^{\lambda+1}}$$

$$F_{\Omega 3}(t)=\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\left(\frac{t^{2\lambda+1}}{(1+t^2)^{\lambda}}-\int_0^t\frac{\tau^{2\lambda}d\tau}{(1+\tau^2)^{\lambda}}\right)\Rightarrow F_{\Omega 3}'(t)=\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\frac{2\lambda t^{2\lambda}}{(1+t^2)^{\lambda+1}}$$

$$Max\frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0}\Leftrightarrow -\frac{1}{l_{r2}}F_{\Omega 1}'\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)+\frac{l_{r1}}{r^2}F_{\Omega 3}'\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{l_{r1}\left(1+\frac{r^2}{l_{r1}}\right)^{\lambda+1}}=\frac{1}{l_{r2}\left(1+\frac{r^2}{l_{r2}}\right)^{\lambda+1}}$$

$$\Leftrightarrow l_{r1}\left(1+\frac{r^2}{l_{r1}}\right)^{\lambda+1}=l_{r2}\left(1+\frac{r^2}{l_{r2}}\right)^{\lambda+1}\Leftrightarrow l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}\left(1+\frac{r^2}{l_{r1}}\right)=l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}\left(1+\frac{r^2}{l_{r2}}\right)\Leftrightarrow l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}=r^2\left(\frac{l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}}-\frac{l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow r^2=\frac{l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}^{-\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{-\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}}\Rightarrow r_{\max}^2(\lambda)=(l_{r1}l_{r2})^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}\frac{l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r1}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}-l_{r2}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}}\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}r_{\max}^2(\lambda)=0$$

$$\frac{dr_{\max}^2(\lambda)}{d\lambda}=(l_{r1}l_{r2})^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}\frac{\left(l_{r2}{}^2-l_{r1}{}^2\right)}{\left(l_{r2}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}\right)^2}Log\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)<0\quad si\quad l_{r2}>l_{r1}$$

.

La position r sur l'axe z correspondant au maximum de la fonction tend vers 0 lorsque la dimension augmente. On peut également regarder la limite de l'expression lorsque $l_{r1}=l_{r2}$ *:*

$$r_{\max}^2(\lambda)=(l_{r1}l_{r2})^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}\frac{l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}}\qquad \lim_{l_{r1}\to l_{r2}}r_{\max}^2(\lambda)=\lim_{\substack{l_{r2}=l_{r1}+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}r_{\max}^2(\lambda)=$$

$$\lim_{\substack{l_{r2}=l_{r1}+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}(l_{r1}(l_{r1}+\varepsilon))^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}\frac{(l_{r1}+\varepsilon)^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{(l_{r1}+\varepsilon)^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}}=l_{r1}^{2\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}\lim_{\substack{l_{r2}=l_{r1}+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{\frac{\varepsilon l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}-1}}{\lambda+1}}{\varepsilon\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}l_{r1}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}-1}}=\frac{l_{r1}^{2\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda+1}-\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}}{2\lambda+1}=\frac{l_{r1}{}^2}{2\lambda+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{l_{r1}\to l_{r2}}r_{\max}^2(\lambda)=\frac{l_{r1}{}^2}{2\lambda+1}$$

.

Même si la configuration géométrique devient un anneau fin sur l'hyperplan perpendiculaire à x_1*, les conditions aux limites du problème sont radicalement différentes puisque hormis sur l'anneau la valeur limite sur l'hyper-plan est fixée à zéro. Il est donc logique qu'il subsiste un point de valeur maximale au dessus de l'origine des coordonnées.*

Dans le problème classique de l'anneau à 3 dimensions, issu de l'électrostatique, sur le plan de l'anneau aucune condition aux limites n'est fixée. Le profil sur l'axe z (qui joue le rôle de l'axe x_1*) est de la forme :* $T(z)\propto\frac{1}{\sqrt{l_{r1}{}^2+z^2}}$*. Toutefois on peut constater que la dérivée première le long de l'axe z s'annule, ce qui fait en quelque sorte de ce problème aux limites un problème mixte ! Il resterait donc à imaginer le profil selon l'axe* x_1 *d'un « anneau » sur l'hyper-plan perpendiculaire chargé avec une densité « linéique » constante.*

Ces profils de la solution sur l'axe x_1 présentent les maximums suivant les dimensions :

$$n=3\,;\,\lambda=\frac{1}{2}\rightarrow r_{max}^2=\left(l_{r1}l_{r2}\right)^{4/3}\frac{\left(l_{r2}{}^{2/3}-l_{r1}{}^{2/3}\right)}{\left(l_{r2}{}^{4/3}-l_{r1}{}^{4/3}\right)}\quad n=4\,;\,\lambda=1\rightarrow r_{max}^2=\frac{\left(l_{r1}l_{r2}\right)^{3/2}\left(l_{r1}+l_{r2}\right)-l_{r1}{}^2l_{r2}{}^2}{l_{r1}{}^2+l_{r2}{}^2+l_{r1}l_{r2}}=\left(l_{r1}l_{r2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\left(l_{r2}{}^{\frac{1}{2}}-l_{r1}{}^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(l_{r2}{}^{\frac{3}{2}}-l_{r1}{}^{\frac{3}{2}}\right)}$$

$$n=5\,;\,\lambda=\frac{3}{2}\rightarrow r_{max}^2=\left(l_{r1}l_{r2}\right)^{8/5}\frac{\left(l_{r2}{}^{2/5}-l_{r1}{}^{2/5}\right)}{\left(l_{r2}{}^{8/5}-l_{r1}{}^{8/5}\right)}\qquad n=6\,;\,\lambda=2\rightarrow r_{max}^2=\left(l_{r1}l_{r2}\right)^{\frac{5}{3}}\frac{\left(l_{r2}{}^{\frac{1}{3}}-l_{r1}{}^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(l_{r2}{}^{\frac{5}{3}}-l_{r1}{}^{\frac{5}{3}}\right)}$$

$$n=7\,;\,\lambda=\frac{5}{2}\rightarrow r_{max}^2=\left(l_{r1}l_{r2}\right)^{12/7}\frac{\left(l_{r2}{}^{2/7}-l_{r1}{}^{2/7}\right)}{\left(l_{r2}{}^{12/7}-l_{r1}{}^{12/7}\right)}$$

Quelques expressions sont utiles pour calculer la valeur maximale :

$$r_{\max}^2=\left(l_{r1}l_{r2}\right)^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}\frac{l_{r2}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}{}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}}\Rightarrow 1+\frac{l_{r1}{}^2}{r_{\max}^2}=l_{r2}{}^{-\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}\frac{l_{r2}{}^2-l_{r1}{}^2}{l_{r2}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}}\quad 1+\frac{l_{r2}{}^2}{r_{\max}^2}=l_{r1}{}^{-\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}\frac{l_{r2}{}^2-l_{r1}{}^2}{l_{r2}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}}$$

$$\frac{l_{r1}}{r_{\max}}=l_{r2}{}^{-1}\left(l_{r1}l_{r2}\right)^{\frac{1}{2(\lambda+1)}}\left(\frac{l_{r2}{}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}}{l_{r2}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad \frac{l_{r2}}{r_{\max}}=l_{r1}{}^{-1}\left(l_{r1}l_{r2}\right)^{\frac{1}{2(\lambda+1)}}\left(\frac{l_{r2}{}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}}{l_{r2}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(1+\frac{l_{r1}{}^2}{r_{\max}^2}\right)^{-\lambda}-\left(1+\frac{l_{r2}{}^2}{r_{\max}^2}\right)^{-\lambda}=\left(\frac{l_{r2}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}{}^2-l_{r1}{}^2}\right)^{\lambda}\left(l_{r2}{}^{\frac{\lambda(2\lambda+1)}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{\lambda(2\lambda+1)}{\lambda+1}}\right)\\ \left(1+\frac{l_{r1}{}^2}{r_{\max}^2}\right)^{1-\lambda}-\left(1+\frac{l_{r2}{}^2}{r_{\max}^2}\right)^{1-\lambda}=\left(\frac{l_{r2}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}{}^2-l_{r1}{}^2}\right)^{\lambda-1}\left(l_{r2}{}^{\frac{(\lambda-1)(2\lambda+1)}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{(\lambda-1)(2\lambda+1)}{\lambda+1}}\right)\\ \left(1+\frac{l_{r1}{}^2}{r_{\max}^2}\right)^{2-\lambda}-\left(1+\frac{l_{r2}{}^2}{r_{\max}^2}\right)^{2-\lambda}=\left(\frac{l_{r2}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}{}^2-l_{r1}{}^2}\right)^{\lambda-2}\left(l_{r2}{}^{\frac{(\lambda-2)(2\lambda+1)}{\lambda+1}}-l_{r1}{}^{\frac{(\lambda-2)(2\lambda+1)}{\lambda+1}}\right)\end{cases}$$

.

Calculons la valeur de la solution au point extrémal en dimensions 3 et 5 :

$$n=3\,;\,\lambda=\frac{1}{2}\rightarrow T(r,0)=\frac{r}{\sqrt{l_{r1}^2+r^2}}-\frac{r}{\sqrt{l_{r2}^2+r^2}}=\left(1+\frac{l_{r1}^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(1+\frac{l_{r2}^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow T\left(r_{\max}^2,0\right)=\left(\frac{l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}^2-l_{r1}^2}\right)^{\lambda}\left(l_{r2}^{\frac{\lambda(2\lambda+1)}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{\lambda(2\lambda+1)}{\lambda+1}}\right)=\frac{\left(l_{r2}^{2/3}-l_{r1}^{2/3}\right)^{1/2}}{\left(l_{r2}^2-l_{r1}^2\right)^{1/2}}\left(l_{r2}^{2/3}-l_{r1}^{2/3}\right)=\frac{\left(l_{r2}^{2/3}-l_{r1}^{2/3}\right)^{3/2}}{\left(l_{r2}^2-l_{r1}^2\right)^{1/2}}$$

$$n=5\,;\,\lambda=\frac{3}{2}\rightarrow T(r,0)=\frac{r\left(2r^2+3l_{r1}^2\right)}{2\left(l_{r1}^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{r\left(2r^2+3l_{r2}^2\right)}{2\left(l_{r2}^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{2+3\frac{l_{r1}^2}{r^2}}{\left(1+\frac{l_{r1}^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2+3\frac{l_{r2}^2}{r^2}}{\left(1+\frac{l_{r2}^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(3\left\{\left(1+\frac{l_{r1}^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(1+\frac{l_{r2}^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}-\left\{\left(1+\frac{l_{r1}^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}-\left(1+\frac{l_{r2}^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right\}\right)$$

$$\Rightarrow T\left(r_{\max}^2,0\right)=\frac{1}{2}\left(3\left(\frac{l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}^2-l_{r1}^2}\right)^{\lambda-1}\left(l_{r2}^{\frac{(\lambda-1)(2\lambda+1)}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{(\lambda-1)(2\lambda+1)}{\lambda+1}}\right)-\left(\frac{l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}^2-l_{r1}^2}\right)^{\lambda}\left(l_{r2}^{\frac{\lambda(2\lambda+1)}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{\lambda(2\lambda+1)}{\lambda+1}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow T\left(r_{\max}^2,0\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}^2-l_{r1}^2}\right)^{\lambda-1}\left(3\left(l_{r2}^{\frac{(\lambda-1)(2\lambda+1)}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{(\lambda-1)(2\lambda+1)}{\lambda+1}}\right)-\left(\frac{l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}^2-l_{r1}^2}\right)\left(l_{r2}^{\frac{\lambda(2\lambda+1)}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{\lambda(2\lambda+1)}{\lambda+1}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow T\left(r_{\max}^2,0\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{l_{r2}^{\frac{2}{5}}-l_{r1}^{\frac{2}{5}}}{l_{r2}^2-l_{r1}^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2\left(l_{r2}^{\frac{12}{5}}-l_{r1}^{\frac{12}{5}}\right)+3l_{r2}^{\frac{2}{5}}l_{r1}^{\frac{2}{5}}\left(l_{r2}^{\frac{8}{5}}-l_{r1}^{\frac{8}{5}}\right)\right)=\frac{\left(l_{r2}^{\frac{4}{5}}-l_{r1}^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}\left(l_{r1}^{\frac{2}{5}}+l_{r2}^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2\left(l_{r2}^2-l_{r1}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(2\left(l_{r1}^{\frac{4}{5}}+l_{r2}^{\frac{4}{5}}\right)-l_{r2}^{\frac{2}{5}}l_{r1}^{\frac{2}{5}}\right)$$

Pour la dimension 7, il vient :

$$n=7\,;\,\lambda=\frac{5}{2}\rightarrow T(r,0)=\frac{r\left(8r^4+20r^2l_{r1}^2+15l_{r1}^4\right)}{8\left(l_{r1}^2+r^2\right)^{\frac{5}{2}}}-\frac{r\left(8r^4+20r^2l_{r2}^2+15l_{r2}^4\right)}{8\left(l_{r2}^2+r^2\right)^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{8}\left(\frac{8+20\frac{l_{r1}^2}{r^2}+15\frac{l_{r1}^4}{r^4}}{\left(1+\frac{l_{r1}^2}{r^2}\right)^{\frac{5}{2}}}-\frac{8+20\frac{l_{r2}^2}{r^2}+15\frac{l_{r2}^4}{r^4}}{\left(1+\frac{l_{r2}^2}{r^2}\right)^{\frac{5}{2}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(15\left\{\left(1+\frac{l_{r1}^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(1+\frac{l_{r2}^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}-10\left\{\left(1+\frac{l_{r1}^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}-\left(1+\frac{l_{r2}^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right\}+3\left\{\left(1+\frac{l_{r1}^2}{r^2}\right)^{-\frac{5}{2}}-\left(1+\frac{l_{r2}^2}{r^2}\right)^{-\frac{5}{2}}\right\}\right)$$

$$\Rightarrow T\left(r_{\max}^2,0\right)=\frac{1}{8}\left(\begin{array}{l}15\left(\frac{l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}^2-l_{r1}^2}\right)^{\lambda-2}\left(l_{r2}^{\frac{(\lambda-2)(2\lambda+1)}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{(\lambda-2)(2\lambda+1)}{\lambda+1}}\right)-10\left(\frac{l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}^2-l_{r1}^2}\right)^{\lambda-1}\left(l_{r2}^{\frac{(\lambda-1)(2\lambda+1)}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{(\lambda-1)(2\lambda+1)}{\lambda+1}}\right)+\\+3\left(\frac{l_{r2}^{\frac{1}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{1}{\lambda+1}}}{l_{r2}^2-l_{r1}^2}\right)^{\lambda}\left(l_{r2}^{\frac{\lambda(2\lambda+1)}{\lambda+1}}-l_{r1}^{\frac{\lambda(2\lambda+1)}{\lambda+1}}\right)\end{array}\right)$$

$$\lambda=\frac{5}{2}\Rightarrow T\left(r_{\max}^2,0\right)=\frac{1}{8}\left(15\left(\frac{l_{r2}^{\frac{2}{7}}-l_{r1}^{\frac{2}{7}}}{l_{r2}^2-l_{r1}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(l_{r2}^{\frac{6}{7}}-l_{r1}^{\frac{6}{7}}\right)-10\left(\frac{l_{r2}^{\frac{2}{7}}-l_{r1}^{\frac{2}{7}}}{l_{r2}^2-l_{r1}^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(l_{r2}^{\frac{18}{7}}-l_{r1}^{\frac{18}{7}}\right)+3\left(\frac{l_{r2}^{\frac{2}{7}}-l_{r1}^{\frac{2}{7}}}{l_{r2}^2-l_{r1}^2}\right)^{\frac{5}{2}}\left(l_{r2}^{\frac{30}{7}}-l_{r1}^{\frac{30}{7}}\right)\right)$$

Pour les dimensions paires les expressions de la valeur maximale prise sont trop complexes et je ne parvient pas à les simplifier convenablement !

Exemple de valeurs propres d'un problème aux limites sur un cône hypersphérique d'angle ouvert ϑ_0 ou une section conique sphérique d'angle ϑ_1 et ϑ_2

Pour un problème aux limites de Dirichlet sur le cône, avec diverses dimensions et divers angles d'ouverture :

si l'on prend n=3 et l'angle $\theta_0 = \pi / 7$ *, alors les 20 premières valeurs propres* ν_l= *4.85051, 11.7962, 18.7798, 25.7719, 32.7673, 39.7643, 46.7622, 53.7606, 60.7594, 67.7585, 74.7577, 81.757, 88.7565, 95.756, 102.756, 109.755, 116.755, 123.755, 130.754, 137.754. Ces valeurs propres sont celles des fonctions de Legendre dans le problème à 3 dimensions.*

si l'on prend n=5 et l'angle $\theta_0 = \pi / 7$ *, alors les 20 premières valeurs propres* ν_l= *7.05252,14.14,21.1738,28.1917,35.2028,42.2104,49.2158,56.22,63.2232,70.2258,77.228,84.2298,91.2313,98.2326,105.234,112.235,119.236,126.236,133.237,140.238*

si l'on prend n=5 et l'angle $\theta_0 = \pi / 3$*, alors les 20 premières valeurs propres* ν_l= *2.19569,5.21953,8.22885,11.2338,14.2369,17.239,20.2405,23.2416,26.2426,29.2433,32.2439,35.2444,38.2448,41.2452,44.2455,47.2458,50.246,53.2462,56.2464,59.2466*

si l'on prend la valeur $\theta_0 = \pi / 2$*, alors on retrouve les valeurs propres* ν_l*=2n+1 quelque soit la dimension.*

si l'on prend n=5 et l'angle $\theta_0 = 10\pi / 7$*, alors les 20 premières valeurs propres* ν_l= *0.70793,2.44934,4.19579,5.94387,7.69267,9.44185,11.1912,12.9408,14.6904,16.4402,18.1899,19.9397,21.6896,23.4394,25.1893,26.9392,28.6891,30.439,32.1889,33.9388*

0.802557, 2.55757, 4.30927, 6.06011, 7.8106, 9.56093, 11.3112, 13.0613, 14.8115, 16.5616, 18.3117, 20.0617, 21.8118, 23.5618, 25.3119, 27.0619, 28.812, 30.562, 32.312, 34.062

Avec un problème homogène de Neumann sur la surface latérale d'un cône fini :

Si l'on prend la valeur $\theta_0 = \pi / 2$*, alors on retrouve les valeurs propres* ν_l*=2n n≥0, quelque soient les dimensions*

si l'on prend n=3 et l'angle $\theta_0 = \pi / 7$*, alors les 20 premières valeurs propres* ν_l= *0, 8.05252, 15.14, 22.1738, 29.1917, 36.2028, 43.2104, 50.2158, 57.22, 64.2232, 71.2258, 78.228, 85.2298, 92.2313, 99.2326, 106.234, 113.235, 120.236, 127.236, 134.237, 141.238, qui sont les valeurs propres de la fonctions de Legendre dans l problème à 3 dimensions.*

si l'on prend n=5 et l'angle $\theta_0 = \pi / 7$ *, alors les 20 premières valeurs propres* ν_l*=9.99843,17.2888,24.4154,31.4871,38.5333,45.5657,52.5896,59.608,66.6227,73.6345,80.6444,87.6527,94.6598,101.666,108.671,115.676,122.68,129.684,136.687,143.69*

si l'on prend l'angle n=5 et $\theta_0 = \pi / 3$*, alors les 21 premières valeurs propres* ν_l= *0, 3.54215,6.62202,9.65707,12.6769,15.6898,18.6988,21.7054,24.7105,27.7146,30.7179,33.7206,36.7229,39.7249,42.7266,45.7281,48.7294,51.7306,54.7316,57.7325,60.7334*

<u>Pour une section conique portée aux conditions homogène de Dirichlet sur la surface latérale :</u>

si l'on prend n=3 et les angles $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = 6\pi/7$*, alors les 10 premières valeurs propres* v_l *=* *0.785441, 2.23009, 3.64994, 5.06115, 6.46833, 7.8733, 9.27695, 10.6797, 12.0819, 13.4837, qui sont les valeurs propres obtenues avec les fonctions de Legendre de première et deuxième espèce.*

si l'on prend n=5 et les angles $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = 6\pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres* v_l *=* *0.196457,1.49885,2.8465,4.21496,5.59421,6.97964,8.36888,9.76064,11.1541,12.5489,13.9445,15.3409,16.7378,18.1352,19.5328,20.9308,22.329,23.7274,25.126,26.5247*

si l'on prend n=5 et les angles $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = 5\pi/14$*, alors les 20 premières valeurs propres* v_l *=* *3.33461,7.92499,12.5624,17.2138,21.8712,26.5316,31.1938,35.8571,40.5211,45.1857,49.8506,54.5158,59.1813,63.8469,68.5127,73.1786,77.8445,82.5106,87.1767,91.8428*

<u>Pour une section conique portée aux conditions homogène de Neumann sur la surface latérale :</u>

si l'on prend n=3 et les angles $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = \pi/2 - \theta_1 = 5\pi/14$*, alors les 20 premières valeurs propres* v_l*=* *4.33461, 8.92499, 13.5624, 18.2138, 22.8712, 27.5316, 32.1938, 36.8571, 41.5211, 46.1857, 50.8506, 55.5158, 60.1813, 64.8469, 69.5127, 74.1786, 78.8445, 83.5106, 88.1767, 92.8428, valeurs propres trouvées dans les problèmes à 3 dimensions en susant des dérivées des fonctions de Legendre de première et deuxième espèces.*

si l'on prend n=3 et les angles $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = \pi - \theta_1 = 6\pi/7$ *, alors les 20 premières valeurs propres* v_l*=* *1.19646, 2.49885, 3.8465, 5.21496, 6.59421, 7.97964, 9.36888, 10.7606, 12.1541, 13.5489, 14.9445, 16.3409, 17.7378, 19.1352, 20.5328, 21.9308, 23.329, 24.7274, 26.126, 27.5247, valeurs propres trouvées dans les problèmes à 3 dimensions en usant des dérivées des fonctions de Legendre de première et deuxième espèces.*

si l'on prend n=5 et les angles $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = \pi/2 - \theta_1 = 5\pi/14$*, alors les 15 premières valeurs propres* v_l*=* *3.9501344925410995711, 8.2834128385236342355, 12.809346397736492616, 17.401247375216465538, 22.021967341828851119, 26.657637518959609635, 31.302014275657881580, 35.951893314552177959, 40.605466517033460048, 45.261638010005546844, 49.919705573719500697, 54.579198731160131830, 59.239790564706123213, 63.901246903964204683, 68.563395646325467105*

si l'on prend n=5 et les angles $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = \pi - \theta_1 = 6\pi/7$*, alors les 24 premières valeurs propres* v_l*=1.0466048324550579151, 2.1757812608454260859, 3.3850217911605080281, \ 4.6529890474965626462, 5.9597359771402670292, 7.2916975842047773814, 8.6403988825458334089, 10.000570975047819093, 11.368862701544714053, 12.743076107492226916, 14.121723821764207918, 15.503769543968034190, 16.888471996221358721, 18.275288355798416165, 19.663812767509201677, 21.053736124908384114, 22.444819102473593578, 23.836873658623547277, 25.229750084734133074, 26.623327765927099942, 28.017508476632268891, 29.412211439420355972, 30.807369631369823981, 32.202926986905071800*

si l'on prend n=5 et les angles $\theta_1 = \pi/14 \quad \theta_2 = 3\pi/7$*, alors les 19 premières valeurs propres* v_l*=* *2.53442527, 5.0298875, 7.614541, 10.269463, 12.96948308, 15.69782180, 18.4444, 21.2033, 23.97088084, 26.7445714, 29.52286, 32.304, 35.0891, 37.8758520, 40.66427, 43.454116, 46.24513748, 49.037142553, 51.829979*

Exemple : *Cône sphérique plein d'angle θ_0, en coordonnées hyper-sphériques (r,θ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $r=l_r$. et de Neumann homogènes en θ_0*

Soit le problème :

$$\Delta^n_{r,\theta} T(r,\theta) = 0 \quad T(r,\theta)\big| / \vec{\mathbf{x}} \in C_{\Omega n} \quad r = \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$$

$$C_{\Omega n} = \left\{ \vec{x} / x_1 \in [0,\infty[, \sum_{i=2}^{n} x_i^{\,2} \in \left[0, x_1^{\,2}\left(\frac{Sin(\vartheta_0)}{Cos(\vartheta_0)}\right)^2\right]\right\} \cap \left\{\vec{x} /, \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \in [0, l_r]\right\}$$

$$\partial C_{\Omega n} = \left\{ \vec{x} / x_1 \in [0,\infty[, \sum_{i=2}^{n} x_i^{\,2} = x_1^{\,2}\left(Tan(\vartheta_0)\right)^2 \right\} \cap \left\{\vec{x} /, \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = l_r\right\}$$

$$C.L. \quad \frac{\partial T(r,\theta)}{\partial \theta}\bigg|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ r\in[0,l_r]}} = 0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta\in[0,\theta_0] \\ r=l_r}} = f(\theta)$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur l'ultrasphère, à savoir :

$T(r,\theta)$ *fini* $\quad T(r,\theta)$ *fonction paire en* θ *soit* $T(r,-\theta) = T(r,\theta)$

$T(r,\theta)$ *ne comporte aucune singularité en* $\theta = 0$, *continue et dérivable* .

Pour respecter la condition aux limites homogène de Neumann , on est amené à rechercher une extension des polynômes de Gegenbauer de degré entier à des fonctions de Gegenbauer de degré non entier ce qui donne la condition suivante pour établir les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville.

$$\mu_0 = Cos(\theta_0)\,;\, \frac{dC^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{dz}\bigg|_{z=\mu_0} = 0 \quad \begin{cases} \dfrac{dC^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{dz} = \dfrac{\nu_l\, z\, C^{\lambda}_{\nu_l}(z) - (2\lambda - 1 + \nu_l) C^{\lambda}_{\nu_l - 1}(z)}{(z^2-1)} \\ \dfrac{dC^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{dz} = \dfrac{(\nu_l+1) C^{\lambda}_{\nu_l+1}(z) - (2\lambda + \nu_l) z C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{(z^2-1)} \end{cases} \forall\, \nu_l > 0 \in \Re \text{ ou } \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_l\, \mu_0\, C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0) - (2\lambda - 1 + \nu_l) C^{\lambda}_{\nu_l-1}(\mu_0)}{\mu_0^{\,2} - 1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nu_l\, \mu_0\, C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0) - (2\lambda - 1 + \nu_l) C^{\lambda}_{\nu_l-1}(\mu_0) = 0 \\ (\nu_l + 1) C^{\lambda}_{\nu_l+1}(\mu_0) - (2\lambda + \nu_l)\mu_0 C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0) = 0 \end{cases}$$

$$\nu_l = 0 \text{ est aussi valeur propre puisque } C^{\lambda}_0(z) = 1 \Rightarrow \frac{dC^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{dz}\bigg|_{z=\mu_0} = 0$$

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l$_r$, donne, (voir également calcul des normes du problème de Sturm-Liouville) :

$$B_0 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \quad B_l = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{\nu_l}^{\lambda}(z)$$

$$\nu_l \quad tq \quad \nu_l = 0\ ou\ \nu_l\ \mu_0\ C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0) - (2\lambda-1+\nu_l)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0) = 0$$

$$\left\| C_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{\nu_l}^{\lambda}(z)^2 = \frac{\left(1-\mu_0^{\ 2}\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}{(2\nu_l+2\lambda)} C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)\frac{\partial^2 C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial z\partial\nu}$$

$$\left\| C_0^{\lambda}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{2\Gamma(\lambda+1)} - \mu_0 \times\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1-2\lambda}{2};\frac{3}{2};\mu_0^{\ 2}\right)$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{\left\| C_0^{\lambda}(z)\right\|^2} + \sum_{l\neq 0,+\infty} \frac{B_l}{\left\| C_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right\|^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

.

Pour les normes de la valeur propre nulle donnons quelques exemples :

$$\left\| C_0^{\lambda}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{2\Gamma(\lambda+1)} - \mu_0 \times\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1-2\lambda}{2};\frac{3}{2};\mu_0^{\ 2}\right)$$

$$n=3 \quad \lambda=\frac{1}{2} \quad \left\| C_0^{\lambda}(z)\right\|^2 = 1-\mu_0$$

$$n=4 \quad \lambda=1 \quad \left\| C_0^{\lambda}(z)\right\|^2 = \left[z\sqrt{1-z^2} + Arcsin(z)\right]_{\mu_0}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \mu_0\sqrt{1-\mu_0^{\ 2}}\right) - Arcsin(\mu_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(Arccos(\mu_0) - \mu_0\sqrt{1-\mu_0^{\ 2}}\right)$$

$$n=5 \quad \lambda=\frac{3}{2} \quad \left\| C_0^{\lambda}(z)\right\|^2 = \frac{2}{3} - \mu_0 + \frac{\mu_0^{\ 4}}{3}$$

Développons la dérivée seconde :

$$\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{\partial z} = \frac{\nu_l\ z\, C_{\nu_l}^{\lambda}(z) - (2\lambda-1+\nu_l)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(z)}{\left(z^2-1\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{\partial\nu\partial z} = \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\nu_l\ z\, C_{\nu_l}^{\lambda}(z) - (2\lambda-1+\nu_l)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(z)}{\left(z^2-1\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{\partial\nu\partial z} = \frac{z\, C_{\nu_l}^{\lambda}(z) - C_{\nu_l-1}^{\lambda}(z)}{z^2-1} + \frac{1}{z^2-1}\left(\nu_l\ z\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{\partial\nu} - (2\lambda-1+\nu_l)\frac{\partial C_{\nu_l-1}^{\lambda}(z)}{\partial\nu}\right)$$

$$or\ \frac{z\, C_{\nu_l}^{\lambda}(z) - C_{\nu_l-1}^{\lambda}(z)}{z^2-1} = \frac{1}{\nu_l}\left(\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{\partial z} + \frac{(2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(z)}{z^2-1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{\partial\nu\partial z} = \frac{1}{\nu_l}\left(\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{\partial z} + \frac{(2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(z)}{z^2-1}\right) + \frac{1}{z^2-1}\left(\nu_l\ z\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{\partial\nu} - (2\lambda-1+\nu_l)\frac{\partial C_{\nu_l-1}^{\lambda}(z)}{\partial\nu}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{\partial\nu\partial z}\right|_{z=\mu_0} = \frac{1}{\nu_l}\left.\left(\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{\partial z} + \frac{(2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(z)}{z^2-1}\right)\right|_{z=\mu_0} + \frac{1}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0\nu_l\ \frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu} - (2\lambda-1+\nu_l)\frac{\partial C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{\partial\nu\partial z}\right|_{z=\mu_0} = \frac{1}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\frac{(2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}{\nu_l} + \mu_0\nu_l\ \frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu} - (2\lambda-1+\nu_l)\frac{\partial C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial\nu}\right)$$

On obtient la valeur de la norme de la fonction de Gegenbauer de degré non entier, solution du problème de Sturm-Liouville avec des conditions adiabatiques :

$$\left\| C_{\nu_l}^{\lambda}(z) \right\|^2 = \frac{\left(1-\mu_0^{\ 2}\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}{\left(2\nu_l+2\lambda\right)} C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0) \frac{\partial^2 C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial z \partial \nu}$$

$$\left.\frac{\partial^2 C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{\partial \nu \partial z}\right|_{z=\mu_0} = \frac{1}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\frac{(2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}{\nu_l} + \mu_0 \nu_l \ \frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu} - (2\lambda-1+\nu_l)\frac{\partial C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}\right)$$

$$\Rightarrow \left\| C_{\nu_l}^{\lambda}(z) \right\|^2 = \frac{\left(1-\mu_0^{\ 2}\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}}{\left(2\nu_l+2\lambda\right)} C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)\left(\frac{(2\lambda-1)C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}{\nu_l} + \mu_0 \nu_l \ \frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu} - (2\lambda-1+\nu_l)\frac{\partial C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial \nu}\right)$$

On peut établir un résultat sur la dérivée seconde à partir de la norme de fonctions de Gegenbauer de degré entier pair, correspondant au cas $\vartheta_0=\pi/2$:

$$\mu_0 = Cos(\pi/2) = 0 \Rightarrow \left\| C_{\nu_l}^{\lambda}(z) \right\|^2 = \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(0)\dfrac{\partial^2 C_{\nu_l}^{\lambda}(0)}{\partial z \partial \nu}}{\left(2\nu_l+2\lambda\right)} \quad \nu_l \quad tq \quad C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0) = 0 \quad et \quad C_{\nu_l-1}^{\lambda}(0) = 0 \Rightarrow \nu_l = 2l$$

$$on\ a\ vu\ que\ C_{2l}^{\lambda}(0) = (-1)^l \frac{\Gamma(l+\lambda)}{l!\Gamma(\lambda)} \Rightarrow \left\| C_{2l}^{\lambda}(z) \right\|^2 = \frac{(-1)^l}{(4l+2\lambda)} \frac{\Gamma(l+\lambda)}{l!\Gamma(\lambda)} \frac{\partial^2 C_{2l}^{\lambda}(0)}{\partial z \partial \nu}$$

$$Or \left\| C_{2l}^{\lambda}(z) \right\|^2 = \int_0^1 dz \ \left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \left(C_{2l}^{\lambda}(z)\right)^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 dz \ \left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \left(C_{2l}^{\lambda}(z)\right)^2 = \frac{\pi\,\Gamma(2l+2\lambda)}{2^{2\lambda}(2l)!(2l+\lambda)(\Gamma(\lambda))^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 C_{2l}^{\lambda}(0)}{\partial z \partial \nu} = (-1)^l \frac{\pi\,\Gamma(2l+2\lambda)(4l+2\lambda)}{2^{2\lambda}(2l)!(2l+\lambda)(\Gamma(\lambda))^2} \frac{l!\Gamma(\lambda)}{\Gamma(l+\lambda)} = (-1)^l \frac{\pi\,\Gamma(2l+2\lambda)}{2^{2\lambda-1}(2l)!(\Gamma(\lambda))^2} \frac{l!\Gamma(\lambda)}{\Gamma(l+\lambda)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 C_{2l}^{\lambda}(0)}{\partial z \partial \nu} = (-1)^l \frac{\pi\,\Gamma(2l+2\lambda)l!}{2^{2\lambda-1}(2l)!\Gamma(\lambda)\Gamma(l+\lambda)} \quad Or \ \frac{\partial^2 C_{2l}^{\lambda}(0)}{\partial \nu \partial z} = (2\lambda-1+2l)\frac{\partial C_{2l-1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_{2l-1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} = (-1)^l \frac{\pi\,\Gamma(2l+2\lambda-1)l!}{2^{2\lambda-1}(2l)!\Gamma(\lambda)\Gamma(l+\lambda)} \Rightarrow \frac{\partial C_{2l+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} = (-1)^{l+1} \frac{\pi\,\Gamma(2l+2\lambda+1)l!(l+1)}{2^{2\lambda-1}(2l+2)!\Gamma(\lambda)\Gamma(l+1+\lambda)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_{2l+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} = (-1)^{l+1} \frac{\pi\,\Gamma(2l+2\lambda+1)l!}{2^{2\lambda}(2l+1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(l+1+\lambda)}$$

$$On\ a\ déjà\ vu\ que\ \frac{\partial C_{2l+1}^{\lambda}(0)}{\partial \nu} = (-1)^{l+1} \frac{\pi\,\Gamma(2l+1+2\lambda)l!}{2^{2\lambda}(2l+1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(l+1+\lambda)}$$

En résumé la solution du problème s'écrit pour tout angle d'ouverture:

$$B_0 = \int_{\mu_0}^1 dz \ f_\theta(z)\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \quad B_l = \int_{\mu_0}^1 dz \ f_\theta(z)\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{\nu_l}^{\lambda}(z) \quad \nu_l = 0 \ ou \ \nu_l \ \mu_0 \, C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0) - (2\lambda-1+\nu_l) C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_0) = 0$$

$$\left\| C_{\nu_l}^{\lambda}(z) \right\|^2 = \int_{\mu_0}^1 dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{\nu_l}^{\lambda}(z)^2 = \frac{\left(1-\mu_0^{\ 2}\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}{\left(2\nu_l+2\lambda\right)} C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0) \frac{\partial^2 C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_0)}{\partial z \partial \nu}$$

$$\left\| C_0^{\lambda}(z) \right\|^2 = \int_{\mu_0}^1 dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{2\lambda+1}{2}\right)}{2\Gamma(\lambda+1)} - \mu_0 \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1-2\lambda}{2}; \frac{3}{2}; \mu_0^{\ 2}\right)$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{\left\| C_0^{\lambda}(z) \right\|^2} + \sum_{l \neq 0, +\infty} \frac{B_l}{\left\| C_{\nu_l}^{\lambda}(z) \right\|^2} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l} C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))$$

Lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=1$ alors on a :

$$B_0=\int_{\mu_0}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}=\left\|C_0^\lambda(z)\right\|^2 \quad B_l=\int_{\mu_0}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}C_{\nu_l}^\lambda(z)$$

$$Comme\quad \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}C_\nu^\lambda(x)=-\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}}C_\nu^\lambda{}'(x)}{\nu(\nu+2\lambda)}=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}}{\nu(\nu+2\lambda)}\left(\nu\, x\, C_\nu^\lambda(x)-(2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(x)\right)$$

$$\Rightarrow B_l=0\Rightarrow T(r,\theta)=1$$

Et l'on retrouve bien la solution triviale T(r,ϑ)=1. A titre d'illustration, choisissons une autre fonction limite de profil :

$$f_\theta(\theta)=1-Heaviside(\theta-\theta_1)\quad avec\ \theta_1\in\left]0,\theta_0\right[$$

$$et\ posons\ \mu_1=Cos(\theta_1)$$

$$B_0=\int_{\mu_1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\quad \left\|C_0^\lambda(z)\right\|^2=\int_{\mu_0}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{2\Gamma(\lambda+1)}-\mu_0\times {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1-2\lambda}{2};\frac{3}{2};\mu_0{}^2\right)$$

$$\Rightarrow B_0=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{2\Gamma(\lambda+1)}-\mu_1\times {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1-2\lambda}{2};\frac{3}{2};\mu_1{}^2\right)$$

$$B_l=\int_{\mu_1}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}C_{\nu_l}^\lambda(z)=\frac{\left(1-\mu_1{}^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\left(\nu_l\,\mu_1\,C_{\nu_l}^\lambda(\mu_1)-(2\lambda-1+\nu_l)C_{\nu_l-1}^\lambda(\mu_1)\right)$$

$$\left\|C_{\nu_l}^\lambda(z)\right\|^2=\int_{\mu_0}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}C_{\nu_l}^\lambda(z)^2=\frac{\left(1-\mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}{(2\nu_l+2\lambda)}C_{\nu_l}^\lambda(\mu_0)\frac{\partial^2C_{\nu_l}^\lambda(\mu_0)}{\partial z\partial\nu}$$

$$T(r,\theta)=\frac{\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{2\Gamma(\lambda+1)}-\mu_1\times {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1-2\lambda}{2};\frac{3}{2};\mu_1{}^2\right)}{\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{2\Gamma(\lambda+1)}-\mu_0\times {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1-2\lambda}{2};\frac{3}{2};\mu_0{}^2\right)}+$$

$$+\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{\left(1-\mu_1{}^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}}{\left(1-\mu_0{}^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}\frac{(2\nu_l+2\lambda)\left(\nu_l\,\mu_1\,C_{\nu_l}^\lambda(\mu_1)-(2\lambda-1+\nu_l)C_{\nu_l-1}^\lambda(\mu_1)\right)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)C_{\nu_l}^\lambda(\mu_0)\dfrac{\partial^2C_{\nu_l}^\lambda(\mu_0)}{\partial z\partial\nu}}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l}C_{\nu_l}^\lambda(Cos(\theta))$$

$$\nu_l=0\ ou\ \nu_l\,\mu_0\,C_{\nu_l}^\lambda(\mu_0)-(2\lambda-1+\nu_l)C_{\nu_l-1}^\lambda(\mu_0)=0$$

.

Exemple : *Cône sphérique creux d'angle θ_0, en coordonnées sphériques (r,θ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes en $r=l_{r1}$, inhomogènes en $r=l_{r2}$. et de Dirichlet ou de Neumann homogènes en θ_0. Soit le problème sur cône ultra-sphérique :*

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\Big| / \vec{\mathbf{x}}\in C_{\Omega n} \quad r=\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}} \quad z=Cos(\theta)\; et\; \mu_0=Cos(\theta_0) \quad T(r,\theta)\; fini$$

$$C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}\in\left[0,x_1^{\,2}\left(\frac{Sin(\vartheta_0)}{Cos(\vartheta_0)}\right)^2\right]\right\}\cap\left\{\vec{x}\,/,\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\in[l_{r1},l_{r2}]\right\}$$

$$\partial C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}=x_1^{\,2}(Tan(\vartheta_0))^2\right\}\cap\left[\left\{\vec{x}\,/,\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}=l_{r1}\right\}\cup\left\{\vec{x}\,/,\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}=l_{r2}\right\}\right]$$

$$C.L.\quad T(r,\theta)\Big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}} \quad ou \quad \frac{\partial T(r,\theta)}{\partial\theta}\Bigg|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}}=0 \quad T(r,\theta)\Big|_{\substack{\theta\in[0,\theta_0]\\ r=l_{r1}}}=0 \quad T(r,\theta)\Big|_{\substack{\theta\in[0,\theta_0]\\ r=l_{r2}}}=f(\theta)$$

En suivant la suite des calculs effectués dans les exemples précédents, pour le cas d'une condition homogène de Dirichlet:

$$\mu_0=Cos(\theta_0)\quad T(r,\theta)=\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{B_l}{\left\|C^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right\|^2}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))\quad \nu_l \quad tq \quad C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta_0))=0\Leftrightarrow C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)=0$$

$$B_l=\int_{\mu_0}^{1}dz\,\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_\theta(z)\,C^{\lambda}_{\nu_l}(z)\quad avec\quad \left\|C^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right\|^2=-\frac{\left(1-\mu_0^{\,2}\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)}{(2\nu_l+2\lambda)}\frac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial\nu}C^{\lambda}_{\nu_l-1}(\mu_0)$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=-\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)B_l}{\left(1-\mu_0^{\,2}\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}(\nu_l+2\lambda-1)\frac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial\nu}C^{\lambda}_{\nu_l-1}(\mu_0)}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)^{\nu_l}}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}\;C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))$$

Et pour le cas d'une condition homogène de Neumann :

$$B_0=\int_{\mu_0}^{1}dz\;f_\theta(z)\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\quad B_l=\int_{\mu_0}^{1}dz\;f_\theta(z)\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}C^{\lambda}_{\nu_l}(z)\quad \nu_l=0\;ou\;\nu_l\,\mu_0\,C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)-(2\lambda-1+\nu_l)C^{\lambda}_{\nu_l-1}(\mu_0)=0$$

$$\left\|C^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right\|^2=\int_{\mu_0}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}C^{\lambda}_{\nu_l}(z)^2=\frac{\left(1-\mu_0^{\,2}\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}{(2\nu_l+2\lambda)}C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)\frac{\partial^2C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial z\partial\nu}$$

$$\left\|C^{\lambda}_{0}(z)\right\|^2=\int_{\mu_0}^{1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{2\Gamma(\lambda+1)}-\mu_0\times\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1-2\lambda}{2};\frac{3}{2};\mu_0^{\,2}\right)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{\left\|C^{\lambda}_{0}(z)\right\|^2}+\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{B_l}{\left\|C^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right\|^2}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l}\;C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))$$

Exemple : *Section sphérique pleine entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphériques (r,θ) soumise à des conditions aux limites inhomogènes de Dirichlet en $r=l_r$. homogènes de Dirichlet en θ_1 et θ_2*

Soit le problème :

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\big|/\vec{\mathbf{x}}\in C_{\Omega n} \quad r=\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}} \quad z=Cos(\theta)\,et\;\mu_0=Cos(\theta_0) \quad T(r,\theta)\;fini$$

$$C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}\in\left[x_1^{\,2}\left(\frac{Sin(\vartheta_1)}{Cos(\vartheta_1)}\right)^2,x_1^{\,2}\left(\frac{Sin(\vartheta_2)}{Cos(\vartheta_2)}\right)^2\right]\right\}\cap\left\{\vec{x}\,/,\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\in[0,l_r]\right\}$$

$$\partial C_{\Omega n}=\left[\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}=x_1^{\,2}(Tan(\vartheta_1))^2\right\}\cup\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}=x_1^{\,2}(Tan(\vartheta_2))^2\right\}\right]\cap$$

$$\cap\left\{\vec{x}\,/,\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}=l_r\right\} \quad C.L. \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_1\\ r\in[0,l_r]}}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_2\\ r\in[0,l_r]}}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta\in[\theta_1,\theta_2]\\ r=l_r}}=f(\theta)$$

Pour respecter les conditions aux limites homogènes angulaires, on est amené à rechercher une extension des fonctions de Gegenbauer de degré entier à des fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce de degré non entier. En respectant la contrainte de finitude et par principe de superposition on recherche donc la solution sous la forme d'une série :

$$T(r,\theta)=\sum_{l\neq 0,+\infty}C_l r^{\nu_l}\left(\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta_2))}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(Cos(\theta_2))}\right)$$

$$Comme\;\theta_2>\theta_1\Rightarrow Cos(\theta_2)<Cos(\theta_1)\;on\;pose\;\mu_1=Cos(\theta_2)\;et\;\mu_2=Cos(\theta_1)\;de\;telle\;manière\;que\;\mu_1<\mu_2$$

$$\nu_l \quad tq \quad \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta_1))}{C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta_2))}=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(Cos(\theta_1))}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(Cos(\theta_2))}\Leftrightarrow\nu_l \quad tq \quad \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(Cos(\theta))=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}\Leftrightarrow\Phi_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)} \quad z=Cos(\theta)$$

Les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville s'écrivent donc :

$$\Phi_{\nu_l}(Cos(\theta))=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}\Leftrightarrow\Phi_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)} \quad z=Cos(\theta)$$

On rappelle que c'est la formule de dérivation en z qui sert à établir la principale formule de la norme pour une fonction propre constituée par une fonction de Legendre de première espèce. Le résultat est donc applicable aux fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce, ainsi qu'à toute combinaison linéaire de ces deux fonctions (notre cas présent). La formule de dérivation utilisée est la suivante :

$$\frac{dC^{\lambda}_{\nu}(z)}{dz}=\frac{\nu\,z\,C^{\lambda}_{\nu}(z)-(2\lambda-1+\nu)C^{\lambda}_{\nu-1}(z)}{(z^2-1)} \quad \frac{dC^{\lambda}_{(Q),\nu}(z)}{dz}=\frac{\nu\,z\,C^{\lambda}_{(Q),\nu}(z)-(2\lambda-1+\nu)C^{\lambda}_{(Q),\nu-1}(z)}{(z^2-1)} \quad \forall\nu>0\in\mathbf{R}\;ou\;\mathbf{N}$$

$$\Rightarrow\frac{d\Phi_{\nu_l}(z)}{dz}=\frac{\nu_l\,z\,\Phi_{\nu_l}(z)-(2\lambda-1+\nu_l)\Phi_{\nu_l-1}(z)}{(z^2-1)}$$

.

La norme pour toute combinaison linéaire : $\Phi_{\nu_l}(z) = aC_{\nu_l}^{\lambda}(z) + bC_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)$ *s'écrit:*

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(\Phi_{\nu_l}(z)\right)^2 = \frac{1}{(2\nu_l+2\lambda)}\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\left(\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(z)}{\partial\nu}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(z)}{\partial z} - \Phi_{\nu_l}(z)\frac{\partial^2\Phi_{\nu_l}(z)}{\partial z\partial\nu}\right)\right]_{\mu_1}^{\mu_2} \quad or \quad \Phi_{\nu_l}(z)\Big|_{\substack{z=\mu_1\\ ou\\ z=\mu_2}} = 0$$

$$\frac{d\Phi_{\nu_l}(z)}{dz} = \frac{\nu_l\, z\,\Phi_{\nu_l}(z) - (2\lambda-1+\nu_l)\Phi_{\nu_l-1}(z)}{\left(z^2-1\right)} = \frac{(2\lambda-1+\nu_l)\Phi_{\nu_l-1}(z) - \nu_l\, z\,\Phi_{\nu_l}(z)}{1-z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_{\nu_l}(z)}{dz}\Bigg|_{\substack{z=\mu_1\\ ou\\ z=\mu_2}} = \frac{(2\lambda-1+\nu_l)\Phi_{\nu_l-1}(z)}{1-z^2}\Bigg|_{\substack{z=\mu_1\\ ou\\ z=\mu_2}}$$

$$\left\|\Phi_{\nu_l}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(\Phi_{\nu_l}(z)\right)^2 = \frac{(2\lambda-1+\nu_l)}{(2\nu_l+2\lambda)}\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(z)}{\partial\nu}\Phi_{\nu_l-1}(z)\right]_{\mu_l}^{\mu_2}$$

$$\left\|\Phi_{\nu_l}(z)\right\|^2 = \frac{(2\lambda-1+\nu_l)}{(2\nu_l+2\lambda)}\left[\left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial\nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_2) - \left(1-\mu_l{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_l)}{\partial\nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_l)\right]$$

On peut également opter pour une évaluation numérique directe des normes des fonctions propres. En effet les formules de calcul des dérivées paramétriques (en λ) des fonctions de Gegenbauer de première espèce ont la désagréable habitude de diverger et pour la deuxième espèce elle n'existe tout simplement pas, sauf à faire intervenir les fonctions de Legendre associées dont elles sont issues. Aussi on se contente de garder la forme littérale de l'intégration pour la norme : $\left\|\Phi_{\nu_l}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(\Phi_{\nu_l}(z)\right)^2$

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l$_r$, donne :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_1 = Cos(\theta_2);\ \mu_2 = Cos(\theta_1) \quad \nu_l \quad tq \quad \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)} = \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)} - \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)} \quad B_l = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} f_\theta(z)\, C_{\nu_l}^{\lambda}(z) \quad C_l = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} f_\theta(z)\, C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)$$

$$\Phi_{\nu_l-1}(\mu_1) = \frac{C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_1)}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)} - \frac{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_1)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_l)}{\partial\nu} = \frac{1}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)}\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_l)}{\partial\nu} - \frac{1}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)}\frac{\partial C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_l)}{\partial\nu}$$

$$\Phi_{\nu_l-1}(\mu_2) = \frac{C_{\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_2)}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)} - \frac{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda}(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial\lambda} = \frac{1}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)(\mu_1)}\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)}{\partial\nu} - \frac{1}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)}\frac{\partial C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)}{\partial\nu}$$

$$\left\|\Phi_{\nu_l}(z)\right\|^2 = \frac{(2\lambda-1+\nu_l)}{(2\nu_l+2\lambda)}\left[\left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial\nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_2) - \left(1-\mu_l{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_l)}{\partial\nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_l)\right]$$

$$T(r,\theta) = \sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)}{(2\lambda-1+\nu_l)}\frac{\left(\frac{B_l}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)} - \frac{C_l}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)}\right)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l}\left[\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))}{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)} - \frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))}{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)}\right]}{\left[\left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial\nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_2) - \left(1-\mu_l{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_l)}{\partial\nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_l)\right]}$$

En prenant en compte les formules d'intégrales indéfinies :

$$\begin{cases} \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} C_\nu^\lambda(x) = -\dfrac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_\nu^\lambda{}'(x)}{\nu(\nu+2\lambda)} = \dfrac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}}{\nu(\nu+2\lambda)}\left(\nu\, x\, C_\nu^\lambda(x) - (2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^\lambda(x)\right) \\ = -\dfrac{2\lambda}{\nu(\nu+2\lambda)}\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{\nu-1}^{\lambda+1}(x) \\ \int dx\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} C_{(Q),\nu}^\lambda(x) = -\dfrac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{(Q),\nu}^\lambda{}'(x)}{\nu(\nu+2\lambda)} = \dfrac{\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}}{\nu(\nu+2\lambda)}\left(\nu\, x\, C_{(Q),\nu}^\lambda(x) - (2\lambda-1+\nu)C_{(Q),\nu-1}^\lambda(x)\right) \\ = -\dfrac{2\lambda}{\nu(\nu+2\lambda)}\left(1-x^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{(Q),\nu-1}^{\lambda+1}(x) \end{cases}$$

Lorsque la fonction limite $f_\vartheta(z)=1$, avec les formes littérales des normes des fonctions propres :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_1 = Cos(\theta_2);\, \mu_2 = Cos(\theta_1) \quad \nu_l \quad tq \quad \frac{C_{\nu_l}^\lambda(\mu_2)}{C_{\nu_l}^\lambda(\mu_1)} = \frac{C_{(Q),\nu_l}^\lambda(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^\lambda(\mu_1)} \quad \Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C_{\nu_l}^\lambda(z)}{C_{\nu_l}^\lambda(\mu_1)} = \frac{C_{(Q),\nu_l}^\lambda(z)}{C_{(Q),\nu_l}^\lambda(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\nu_l-1}(\mu_1) = \frac{C_{\nu_l-1}^\lambda(\mu_1)}{C_{\nu_l}^\lambda(\mu_1)} - \frac{C_{(Q),\nu_l-1}^\lambda(\mu_1)}{C_{(Q),\nu_l}^\lambda(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_l)}{\partial\nu} = \frac{1}{C_{\nu_l}^\lambda(\mu_1)}\frac{\partial C_{\nu_l}^\lambda(\mu_l)}{\partial\nu} - \frac{1}{C_{(Q),\nu_l}^\lambda(\mu_1)}\frac{\partial C_{(Q),\nu_l}^\lambda(\mu_l)}{\partial\nu}$$

$$\Phi_{\nu_l-1}(\mu_2) = \frac{C_{\nu_l-1}^\lambda(\mu_2)}{C_{\nu_l}^\lambda(\mu_1)} - \frac{C_{(Q),\nu_l-1}^\lambda(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l}^\lambda(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial\lambda} = \frac{1}{C_{\nu_l}^\lambda(\mu_1)(\mu_1)}\frac{\partial C_{\nu_l}^\lambda(\mu_2)}{\partial\nu} - \frac{1}{C_{(Q),\nu_l}^\lambda(\mu_1)}\frac{\partial C_{(Q),\nu_l}^\lambda(\mu_2)}{\partial\nu}$$

$$\left\|\Phi_{\nu_l}(z)\right\|^2 = \frac{(2\lambda-1+\nu_l)}{(2\nu_l+2\lambda)}\left[\left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial\nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_2) - \left(1-\mu_l{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_l)}{\partial\nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_l)\right]$$

$$\frac{1}{C_{\nu_l}^\lambda(\mu_1)}\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{\nu_l}^\lambda(z) = -\frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)C_{\nu_l}^\lambda(\mu_1)}\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(z)\right]_{\mu_1}^{\mu_2} = \frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}A_l$$

$$\frac{1}{C_{(Q),\nu_l}^\lambda(\mu_1)}\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{(Q),\nu_l}^\lambda(z) = -\frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)C_{(Q),\nu_l}^\lambda(\mu_1)}\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(z)\right]_{\mu_1}^{\mu_2} = \frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}D_l$$

$$\Rightarrow A_l = \frac{\left[\left(1-\mu_1{}^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1) - \left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_2)\right]}{C_{\nu_l}^\lambda(\mu_1)} \quad D_l = \frac{\left[\left(1-\mu_1{}^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1) - \left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_2)\right]}{C_{(Q),\nu_l}^\lambda(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{2\lambda(A_l - D_l)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\left\|\Phi_{\nu_l}^\lambda(z)\right\|^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l}\left[\frac{C_{\nu_l}^\lambda(Cos(\theta))}{C_{\nu_l}^\lambda(\mu_1)} - \frac{C_{(Q),\nu_l}^\lambda(Cos(\theta))}{C_{(Q),\nu_l}^\lambda(\mu_1)}\right]$$

Le cas particulier où $\theta_2=\pi-\theta_1$ entraînant $\mu_1=-\mu_2$., cela donne une condition aux limites paires et il s'ensuit que la solution du problème aux limites doit également être paire. Plus généralement un problème pour lequel $\theta_2=\pi-\theta_1$, $\mu_1=-\mu_2$, avec une condition aux limites paire doit normalement conduire à une solution paire :

$$f_\theta(\theta) = f_\theta(\pi-\theta) \Rightarrow T(r,\theta) = T(r,\pi-\theta)$$

avec une condition aux limites impaire doit normalement conduire à une solution impaire :

$$f_\theta(\theta) = -f_\theta(\pi-\theta) \Rightarrow T(r,\theta) = -T(r,\pi-\theta)$$

C'est ce que nous avons démontré dans un paragraphe spécial consacré à ce sujet :

Exemple *: Section sphérique pleine entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphériques (r,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $r=l_r$. de Neumann homogènes en θ_1 et θ_2. Soit le problème :*

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\big|/\vec{\mathbf{x}}\in C_{\Omega n} \quad r=\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}} \quad z=Cos(\theta)\,et\;\mu_0=Cos(\theta_0) \quad T(r,\theta)\;fini$$

$$C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}\in\left[x_1^{\,2}\left(\frac{Sin(\vartheta_1)}{Cos(\vartheta_1)}\right)^2,x_1^{\,2}\left(\frac{Sin(\vartheta_2)}{Cos(\vartheta_2)}\right)^2\right]\right\}\cap\left\{\vec{x}\,/\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\in[0,l_r]\right\}$$

$$\partial C_{\Omega n}=\left[\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}=x_1^{\,2}(Tan(\vartheta_1))^2\right\}\cup\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}=x_1^{\,2}(Tan(\vartheta_2))^2\right\}\right]\cap$$

$$\cap\left\{\vec{x}\,/,\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}=l_r\right\} \quad C.L. \quad \left.\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\substack{\theta=\theta_1\\ r\in[0,l_r]}}=0 \quad \left.\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\substack{\theta=\theta_2\\ r\in[0,l_r]}}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta\in[\theta_1,\theta_2]\\ r=l_r}}=f(\vartheta)$$

Pour respecter les conditions aux limites homogènes angulaires, on est amené à rechercher une extension des fonctions de Gegenbauer de degré entier à des fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce de degré non entier. Par principe de superposition on recherche et on trouve la solution sous la forme de la série suivante :

$$z=Cos(\theta) \quad \mu_1=Cos(\theta_2);\,\mu_2=Cos(\theta_1) \quad \nu_l \quad tq \quad \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}{}'(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}{}'(\mu_1)}=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}{}'(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}{}'(\mu_1)}\Leftrightarrow\frac{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}=\frac{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}$$

$$or \quad C^{\lambda}_{\nu_l}{}'(z)=2\lambda C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(z)\Leftrightarrow \quad \nu_l \quad tq \quad \frac{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}=\frac{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)} \quad \Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}$$

$$\left\|\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right\|^2=\frac{\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)\frac{\partial^2\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{\partial z\partial\nu}\right]_{\mu_2}^{\mu_1}}{(2\nu+2\lambda)}=\frac{2\lambda\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)\frac{\partial\Phi^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(z)}{\partial\nu}\right]_{\mu_2}^{\mu_1}}{(2\nu+2\lambda)}$$

$$\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}{\partial\nu}=\frac{1}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_l)}{\partial\nu}-\frac{1}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_l)}{\partial\nu}$$

$$\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}=\frac{1}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial\nu}-\frac{1}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)}{\partial\nu}$$

$$\left\|\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right\|^2=\frac{2\lambda}{(2\nu+2\lambda)}\left[\left(1-\mu_1^{\,2}\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)\frac{\partial\Phi^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}{\partial\nu}-\left(1-\mu_2^{\,2}\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)\frac{\partial\Phi^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{\partial\nu}\right]$$

$$B_l=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_\theta(z)\,C^{\lambda}_{\nu_l}(z) \quad C_l=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_\theta(z)\,C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)$$

$$T(r,\theta)=\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{\left(\frac{B_l}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}-\frac{C_l}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\right)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l}\left[\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\right]}{\left\|\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right\|^2}$$

.

Il faut rajouter comme toujours la solution de valeur propres nulle, ce qui donne :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_1 = Cos(\theta_2);\ \mu_2 = Cos(\theta_1) \quad \nu_l \quad tq \quad \frac{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)} = \frac{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}$$

$$\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z) = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)} - \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)} \quad \Phi_0(z) = 1 \quad \left\|\Phi_0(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \quad \left\|\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right)^2$$

$$\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1) = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)} - \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)} \quad \frac{\partial \Phi^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}{\partial \nu} = \frac{1}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_l)}{\partial \nu} - \frac{1}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_l)}{\partial \nu}$$

$$\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2) = \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)} - \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)} \quad \frac{\partial \Phi^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{\partial \lambda} = \frac{1}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial \nu} - \frac{1}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)}{\partial \nu}$$

$$\left\|\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right\|^2 = \frac{2\lambda}{(2\nu+2\lambda)}\left[\left(1-\mu_1{}^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)\frac{\partial \Phi^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}{\partial \nu} - \left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)\frac{\partial \Phi^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{\partial \nu}\right]$$

$$B_0 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} f_\theta(z) \quad B_l = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} f_\theta(z)\, C^{\lambda}_{\nu_l}(z) \quad C_l = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} f_\theta(z)\, C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{\left\|\Phi_0(z)\right\|^2} + \sum_{l\neq 0,+\infty} \frac{\left(\frac{B_l}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)} - \frac{C_l}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\right)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l}\left[\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)} - \frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\right]}{\left\|\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)\right\|^2}$$

Lorsque la fonction limite $f_\vartheta(z)=1$, on a

$$B_0 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} = \left\|\Phi_0(z)\right\|^2$$

$$B_l = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C^{\lambda}_{\nu_l}(z) = \frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(z)\right]_{\mu_2}^{\mu_1}$$

$$C_l = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z) = \frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(z)\right]_{\mu_2}^{\mu_1}$$

$$\frac{B_l}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)} - \frac{C_l}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)} = \frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\begin{pmatrix} \frac{\left(1-\mu_1{}^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)} - \frac{\left(1-\mu_1{}^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)} - \\ - \frac{\left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)} + \frac{\left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(1-\mu_1{}^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\left[\frac{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)} - \frac{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\right] - \\ -\left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\left[\frac{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)} + \frac{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\right] \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{B_l}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)} - \frac{C_l}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)} = 0 \Rightarrow T(r,\theta) = \frac{B_0}{\left\|\Phi_0(z)\right\|^2} = 1$$

On retrouve donc la solution triviale $T(r,\vartheta)=1$.

Lorsque la fonction limite $f_\vartheta(z)$ présente un profil en fonction de Heaviside :

$$f_\theta(z)=1 \quad si\ z\in\left[\mu_1,\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right] \quad f_\theta(z)=0 \quad si\ z\notin\left[\mu_1,\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right]$$

$$B_0=\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \quad \Phi_0(z)=1 \quad \left\|\Phi_0(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}$$

$$B_l=\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{\nu_l}^{\lambda}(z)=\frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(z)\right]_{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}^{\mu_1}$$

$$\Rightarrow B_l=\frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\left[\left(1-\mu_1^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)-\left(1-\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right]$$

$$C_l=\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)=\frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(z)\right]_{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}^{\mu_1}$$

$$\Rightarrow C_l=\frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\left[\left(1-\mu_1^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)-\left(1-\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}} C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{B_l}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_l}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}=-\frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\left(1-\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\left[\frac{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\right]$$

$$\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(z)=\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)} \quad \left\|\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right)^2$$

$$\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)=\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}{\partial\nu}=\frac{1}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\frac{\partial C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_l)}{\partial\nu}-\frac{1}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\frac{\partial C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_l)}{\partial\nu}$$

$$\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)=\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_2)}{\partial\lambda}=\frac{1}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)}{\partial\nu}-\frac{1}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\frac{\partial C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_2)}{\partial\nu}$$

$$\left\|\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right\|^2=\frac{2\lambda}{(2\nu+2\lambda)}\left[\left(1-\mu_1^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)\frac{\partial\Phi_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}{\partial\nu}-\left(1-\mu_2^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\frac{\partial\Phi_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_2)}{\partial\nu}\right]$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{\left\|\Phi_0(z)\right\|^2}-$$

$$-\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{2\lambda\left(1-\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\frac{\left(\frac{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\right)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_l}\left[\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\right]}{\left\|\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right\|^2}$$

Extension aux cas de l'hémisphère à N-dimensions porté à la condition de Dirichlet homogène nulle sur la base

Dans la configuration symétrique précédente, lorsque les conditions aux limites sont impaires, la solution est construite à l'aide des seules fonctions impaires, ce qui conduit à ce que la valeur sur la tranche (base de l'hypersphère) soit exactement nulle. C'est donc également la solution d'un problème aux limites sur un hémisphère à n-dimensions évidé par un cône supérieur d'angle d'ouverture ϑ_1 :

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\Big|/\ \vec{\mathbf{x}}\in C_{\Omega n} \quad r=\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}} \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_0=Cos(\theta_0) \quad T(r,\theta)\ fini$$

$$\vartheta_1 \quad ; \quad \vartheta_2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\ 2}\in\left[x_1^{\ 2}\left(\frac{Sin(\vartheta_1)}{Cos(\vartheta_1)}\right)^2,\infty\right]\right\}\cap\left\{\vec{x}\,/\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}\in[0,l_r]\right\}$$

$$\partial C_{\Omega n}=\left[\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\ 2}=x_1^{\ 2}(Tan(\vartheta_1))^2\right\}\cup\left\{\vec{x}\,/\,x_1=0\right\}\right]\cap\left\{\vec{x}\,/,\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}=l_r\right\}$$

$$C.L.\quad \left.\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\substack{\theta=\theta_1\\ r\in[0,l_r]}}=0 \quad \left.\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\substack{\theta=\frac{\pi}{2}\\ r\in[0,l_r]}}=0 \quad T(r,\theta)\Big|_{\substack{\theta\in\left[\theta_1,\frac{\pi}{2}\right]\\ r=l_r}}=f(\theta)$$

Avec pour solution, par construction impaire en z :

$$z=Cos(\theta) \quad \mu_1=Cos(\theta_2)=-\mu_2 \quad ; \quad \mu_2=Cos(\theta_1)$$

$$\nu_l \quad tq \quad \frac{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(-\mu_2)}=\frac{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(-\mu_2)} \quad \Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)}$$

$$\Phi^{\lambda}_{\nu_{2l}}(z)\quad paires\quad 2l\ z\acute{e}ros\ \Phi^{\lambda}_{\nu_{2l}}(-z)=\Phi^{\lambda}_{\nu_{2l}}(-z) \quad \Phi^{\lambda}_{\nu_{2l+1}}(z)\quad impaires\quad 2l+1\ z\acute{e}ros\ \Phi^{\lambda}_{\nu_{2l+1}}(-z)=-\Phi^{\lambda}_{\nu_{2l+1}}(-z)$$

$$\left\|\Phi^{\lambda}_{\nu_{2l+1}}(z)\right\|^2=-\frac{2\lambda\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi^{\lambda}_{\nu_{2l+1}}(z)\frac{\partial\Phi^{\lambda+1}_{\nu_{2l+1}-1}(z)}{\partial\nu}\right]_{-\mu_2}^{\mu_2}}{(2\nu_{2l+1}+2\lambda)}\Rightarrow\left\|\Phi^{\lambda}_{\nu_{2l+1}}(z)\right\|^2=-\frac{4\lambda\left(1-\mu_2^{\ 2}\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi^{\lambda}_{\nu_{2l+1}}(\mu_2)\frac{\partial\Phi^{\lambda+1}_{\nu_{2l+1}-1}(\mu_2)}{\partial\nu}}{(2\nu_{2l+1}+2\lambda)}$$

$$\Phi^{\lambda}_{\nu_{2l+1}}(\mu_2)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_{2l+1}}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{\nu_{2l+1}-1}(\mu_2)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_{2l+1}}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_{2l+1}-1}(\mu_2)} \quad \frac{\partial\Phi^{\lambda+1}_{\nu_{2l+1}-1}(\mu_2)}{\partial\nu}=\frac{1}{C^{\lambda+1}_{\nu_{2l+1}-1}(\mu_2)}\frac{\partial C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{\partial\nu}-\frac{1}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_{2l+1}-1}(\mu_2)}\frac{\partial C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_{2l+1}-1}(\mu_2)}{\partial\nu}$$

$$B_{2l+1}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\,\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_\theta(z)\,C^{\lambda}_{\nu_{2l+1}}(z)=2\int_0^{\mu_2}dz\,\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_\theta(z)\,C^{\lambda}_{\nu_{2l+1}}(z)$$

$$C_{2l+1}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_\theta(z)\,C^{\lambda}_{(Q),\nu_{2l+1}}(z)=2\int_0^{\mu_2}dz\,\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_\theta(z)\,C^{\lambda}_{(Q),\nu_{2l+1}}(z)$$

$$T(r,\theta)=\sum_{l=0,+\infty}\frac{\left(\frac{B_{2l+1}}{C^{\lambda+1}_{\nu_{2l+1}-1}(\mu_2)}-\frac{C_{2l+1}}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_{2l+1}-1}(\mu_2)}\right)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\nu_{2l+1}}\left[\frac{C^{\lambda}_{\nu_{2l+1}}(Cos(\theta))}{C^{\lambda+1}_{\nu_{2l+1}-1}(\mu_2)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_{2l+1}-1}(\mu_2)}\right]}{\left\|\Phi^{\lambda}_{\nu_{2l+1}}(z)\right\|^2}$$

.

Exemple ***:*** *Section sphérique creuse d'angle* θ_1,θ_2*, en coordonnées sphériques (r,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes en* $r=l_{r1}$ *et inhomogènes en* $r=l_{r2}$ *, homogènes en* θ_1 *et* θ_2*. Soit le problème :*

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\Big|/\vec{\mathbf{x}}\in C_{\Omega n} \quad r=\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}} \quad z=Cos(\theta)\; et\; \mu_0=Cos(\theta_0) \quad T(r,\theta)\; fini$$

$$C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}\in\left[x_1^{\,2}\left(\frac{Sin(\vartheta_1)}{Cos(\vartheta_1)}\right)^2,x_1^{\,2}\left(\frac{Sin(\vartheta_2)}{Cos(\vartheta_2)}\right)^2\right]\right\}\cap\left\{\vec{x}\,/\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\in[l_{r1},l_{r2}]\right\}$$

$$\partial C_{\Omega n}=\left[\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}=x_1^{\,2}(Tan(\vartheta_1))^2\right\}\cup\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}=x_1^{\,2}(Tan(\vartheta_2))^2\right\}\right]\cap$$

$$\cap\left[\left\{\vec{x}\,/,\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}=l_{r1}\right\}\cup\left\{\vec{x}\,/,\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}=l_{r2}\right\}\right]$$

$$C.L.\quad T(r,\theta)\Big|_{\substack{\theta=\theta_1\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}}=0 \quad T(r,\theta)\Big|_{\substack{\theta=\theta_2\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}}=0 \quad T(r,\theta)\Big|_{\substack{\theta\in[\theta_1,\theta_2]\\ r=l_{r1}}}=0 \quad T(r,\theta)\Big|_{\substack{\theta\in[\theta_1,\theta_2]\\ r=l_{r2}}}=f(\theta)$$

En reprenant les résultats d'un exemple précédent en modifiant la partie radiale, nous avons :

$$z=Cos(\theta) \quad \mu_1=Cos(\theta_2)\,;\,\mu_2=Cos(\theta_1) \quad \nu_l \quad tq \quad \frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}=\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)} \quad B_l=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_\theta(z)\,C^{\lambda}_{\nu_l}(z) \quad C_l=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_\theta(z)\,C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)$$

$$\Phi_{\nu_l-1}(\mu_1)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l-1}(\mu_1)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_l)}{\partial\nu}=\frac{1}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_l)}{\partial\nu}-\frac{1}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_l)}{\partial\nu}$$

$$\Phi_{\nu_l-1}(\mu_2)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial\lambda}=\frac{1}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial\nu}-\frac{1}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{\partial\nu}$$

$$\left\|\Phi_{\nu_l}(z)\right\|^2=\frac{(2\lambda-1+\nu_l)}{(2\nu_l+2\lambda)}\left[\left(1-\mu_2^{\,2}\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial\nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_2)-\left(1-\mu_l^{\,2}\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_l)}{\partial\nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_l)\right]$$

$$T(r,\theta)=\sum_{l\neq0,+\infty}\frac{(2\nu_l+2\lambda)}{(2\lambda-1+\nu_l)}\frac{\left(\frac{B_l}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}-\frac{C_l}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}\right)\left[\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}\right]}{\left[\left(1-\mu_2^{\,2}\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial\nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_2)-\left(1-\mu_l^{\,2}\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial\Phi_{\nu_l}(\mu_l)}{\partial\nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_l)\right]}\frac{\left[\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right]}{\left[\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right]}$$

Lorsque la fonction limite $f_\vartheta(z)=1$, on a :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_1 = Cos(\theta_2)\,;\ \mu_2 = Cos(\theta_1) \quad \nu_l \quad tq \quad \frac{C^\lambda_{\nu_l}(\mu_2)}{C^\lambda_{\nu_l}(\mu_1)} = \frac{C^\lambda_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^\lambda_{(Q),\nu_l}(\mu_1)} \quad \Phi_{\nu_l}(z) = \frac{C^\lambda_{\nu_l}(z)}{C^\lambda_{\nu_l}(\mu_1)} = \frac{C^\lambda_{(Q),\nu_l}(z)}{C^\lambda_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\nu_l-1}(\mu_1) = \frac{C^\lambda_{\nu_l-1}(\mu_1)}{C^\lambda_{\nu_l}(\mu_1)} - \frac{C^\lambda_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}{C^\lambda_{(Q),\nu_l}(\mu_1)} \quad \frac{\partial \Phi_{\nu_l}(\mu_l)}{\partial \nu} = \frac{1}{C^\lambda_{\nu_l}(\mu_1)}\frac{\partial C^\lambda_{\nu_l}(\mu_l)}{\partial \nu} - \frac{1}{C^\lambda_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}\frac{\partial C^\lambda_{(Q),\nu_l}(\mu_l)}{\partial \nu}$$

$$\Phi_{\nu_l-1}(\mu_2) = \frac{C^\lambda_{\nu_l-1}(\mu_2)}{C^\lambda_{\nu_l}(\mu_1)} - \frac{C^\lambda_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)}{C^\lambda_{(Q),\nu_l}(\mu_1)} \quad \frac{\partial \Phi_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial \lambda} = \frac{1}{C^\lambda_{\nu_l}(\mu_1)(\mu_1)}\frac{\partial C^\lambda_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial \nu} - \frac{1}{C^\lambda_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}\frac{\partial C^\lambda_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{\partial \nu}$$

$$\left\|\Phi_{\nu_l}(z)\right\|^2 = \frac{(2\lambda - 1 + \nu_l)}{(2\nu_l + 2\lambda)}\left[\left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial \Phi_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial \nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_2) - \left(1-\mu_l{}^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\partial \Phi_{\nu_l}(\mu_l)}{\partial \nu}\Phi_{\nu_l-1}(\mu_l)\right]$$

$$\frac{1}{C^\lambda_{\nu_l}(\mu_1)}\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\,\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C^\lambda_{\nu_l}(z) = -\frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)C^\lambda_{\nu_l}(\mu_1)}\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(z)\right]_{\mu_1}^{\mu_2} = \frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}A_l$$

$$\frac{1}{C^\lambda_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} C^\lambda_{(Q),\nu_l}(z) = -\frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)C^\lambda_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(z)\right]_{\mu_1}^{\mu_2} = \frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}D_l$$

$$\Rightarrow A_l = \frac{\left[\left(1-\mu_1{}^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1) - \left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)\right]}{C^\lambda_{\nu_l}(\mu_1)}$$

$$D_l = \frac{\left[\left(1-\mu_1{}^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1) - \left(1-\mu_2{}^2\right)^{\frac{(2\lambda+1)}{2}} C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)\right]}{C^\lambda_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{2\lambda(A_l - D_l)}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)\left\|\Phi^\lambda_{\nu_l}(z)\right\|^2}\frac{\left[\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right]}{\left[\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right]}\left[\frac{C^\lambda_{\nu_l}(Cos(\theta))}{C^\lambda_{\nu_l}(\mu_1)} - \frac{C^\lambda_{(Q),\nu_l}(Cos(\theta))}{C^\lambda_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}\right]$$

Exemple : *Section sphérique creuse d'angle θ_1,θ_2, en coordonnées sphériques (r,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes en $r=l_{r1}$ et inhomogènes en $r=l_{r2}$, Neumann homogènes en θ_1 et θ_2 Soit le problème :*

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\big|/\vec{\mathbf{x}}\in C_{\Omega n} \quad r=\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} \quad z=Cos(\theta)\,et\ \mu_0=Cos(\theta_0) \quad T(r,\theta)\ fini$$

$$C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}/x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^2\in\left[x_1^2\left(\frac{Sin(\vartheta_1)}{Cos(\vartheta_1)}\right)^2,x_1^2\left(\frac{Sin(\vartheta_2)}{Cos(\vartheta_2)}\right)^2\right]\right\}\cap\left\{\vec{x}/\sum_{i=1}^{n}x_i^2\in[l_{r1},l_{r2}]\right\}$$

$$\partial C_{\Omega n}=\left[\left\{\vec{x}/x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^2=x_1^2(Tan(\vartheta_1))^2\right\}\cup\left\{\vec{x}/x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^2=x_1^2(Tan(\vartheta_2))^2\right\}\right]\cap$$

$$\cap\left[\left\{\vec{x}/,\sum_{i=1}^{n}x_i^2=l_{r1}\right\}\cup\left\{\vec{x}/,\sum_{i=1}^{n}x_i^2=l_{r2}\right\}\right]$$

$$C.L.\quad \left.\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\substack{\theta=\theta_1\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}}=0 \quad \left.\frac{T(r,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\substack{\theta=\theta_2\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta\in[\theta_1,\theta_2]\\ r=l_{r1}}}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta\in[\theta_1,\theta_2]\\ r=l_{r2}}}=f(\theta)$$

En suivant les résultats d'un exemple précédent et en intégrant la solution de valeur propre de la forme $A+Br^{2\lambda}$, il vient :

$$z=Cos(\theta) \quad \mu_1=Cos(\theta_2);\ \mu_2=Cos(\theta_1) \quad \nu_l \quad tq \quad \frac{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}=\frac{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}$$

$$\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(z)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)} \quad \Phi_0(z)=1 \quad \|\Phi_0(z)\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}$$

$$\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_1)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}{\partial\nu}=\frac{1}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_l)}{\partial\nu}-\frac{1}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_l)}{\partial\nu}$$

$$\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)=\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(\mu_2)}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}=\frac{1}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)}{\partial\nu}-\frac{1}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\frac{\partial C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_2)}{\partial\nu}$$

$$\|\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)\|^2=\frac{2\lambda}{(2\nu+2\lambda)}\left[\left(1-\mu_1^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_1)\frac{\partial\Phi^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}{\partial\nu}-\left(1-\mu_2^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_2)\frac{\partial\Phi^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_2)}{\partial\nu}\right]$$

$$B_0=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_\theta(z) \quad B_l=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_\theta(z)\,C^{\lambda}_{\nu_l}(z) \quad C_l=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}f_\theta(z)\,C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{\|\Phi_0(z)\|^2}\frac{\left[1-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2\lambda}\right]}{\left[1-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2\lambda}\right]}+\sum_{l\neq0,+\infty}\left[\frac{\left(\frac{B_l}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}-\frac{C_l}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\right)\frac{\left[\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right]}{\left[\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right]}}{\|\Phi^{\lambda}_{\nu_l}(z)\|^2}\times\atop\times\left[\frac{C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda+1}_{\nu_l-1}(\mu_1)}-\frac{C^{\lambda}_{(Q),\nu_l}(Cos(\theta))}{C^{\lambda+1}_{(Q),\nu_l-1}(\mu_1)}\right]\right]$$

Lorsque la fonction limite $f_\vartheta(z)=1$, on retrouve rapidement la solution triviale, puisque B_0 est identique à la norme de la fonction propre angulaire de valeur propre nulle, trivialement égal à 1 :

$$T(r,\theta)=\left(1-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2\lambda}\right)\Bigg/\left(1-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2\lambda}\right)$$

. Lorsque la fonction limite $f_\vartheta(z)$ présente un profil en fonction de Heaviside (voir un exemple précédent pour le résultat de certains calculs), il vient :

$$f_\theta(z)=1 \quad si\ z\in\left[\mu_1,\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right] \quad f_\theta(z)=0 \quad si\ z\notin\left[\mu_1,\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right]$$

$$B_0=\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \quad \Phi_0(z)=1 \quad \left\|\Phi_0(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}$$

$$B_l=\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}C_{\nu_l}^{\lambda}(z) \quad C_l=\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)$$

$$\Rightarrow \frac{B_l}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_l}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}=-\frac{2\lambda}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\left(1-\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\left[\frac{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\right]$$

$$\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(z)=\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(z)}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)} \quad \left\|\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right)^2$$

$$\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)=\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}{\partial\nu}=\frac{1}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\frac{\partial C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_l)}{\partial\nu}-\frac{1}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\frac{\partial C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_l)}{\partial\nu}$$

$$\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)=\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)} \quad \frac{\partial\Phi_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_2)}{\partial\lambda}=\frac{1}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\frac{\partial C_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)}{\partial\nu}-\frac{1}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\frac{\partial C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_2)}{\partial\nu}$$

$$\left\|\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right\|^2=\frac{2\lambda}{(2\nu+2\lambda)}\left[\left(1-\mu_1^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_1)\frac{\partial\Phi_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}{\partial\nu}-\left(1-\mu_2^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(\mu_2)\frac{\partial\Phi_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_2)}{\partial\nu}\right]$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{\left\|\Phi_0(z)\right\|^2}\frac{\left[1-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2\lambda}\right]}{\left[1-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2\lambda}\right]}-$$

$$-\sum_{l\neq0,+\infty}\left[\frac{2\lambda\left(1-\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)^2\right)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}{\nu_l(\nu_l+2\lambda)}\frac{\left(\frac{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\nu_l}^{\lambda}(z)\right\|^2}\times \atop \times\frac{\left[\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right]^{\nu_l}}{\left[\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\nu_l}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\nu_l+2\lambda}\right]}\left[\frac{C_{\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))}{C_{\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}-\frac{C_{(Q),\nu_l}^{\lambda}(Cos(\theta))}{C_{(Q),\nu_l-1}^{\lambda+1}(\mu_1)}\right]\right]$$

.

Solution des problèmes aux limites homogènes en dimension radiale sur un cône hypersphérique

Envisageons un autre type de problèmes homogènes dans la dimension radiale, à savoir :

$$\Delta^n_{r,\theta}T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\big|/\,\vec{\mathbf{x}}\in C_{\Omega n} \quad r=\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}} \quad z=Cos(\theta)\, et\ \mu_0=Cos(\theta_0) \quad T(r,\theta)\ fini$$

$$C_{\Omega n}=\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}\in\left[x_1^{\,2}\left(\frac{Sin(\vartheta_1)}{Cos(\vartheta_1)}\right)^2,x_1^{\,2}\left(\frac{Sin(\vartheta_2)}{Cos(\vartheta_2)}\right)^2\right]\right\}\cap\left\{\vec{x}\,/\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\in[l_{r1},l_{r2}]\right\}$$

$$\partial C_{\Omega n}=\left[\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}=x_1^{\,2}(Tan(\vartheta_1))^2\right\}\cup\left\{\vec{x}\,/\,x_1\in[0,\infty[,\sum_{i=2}^{n}x_i^{\,2}=x_1^{\,2}(Tan(\vartheta_2))^2\right\}\right]\cap$$

$$\cap\left[\left\{\vec{x}\,/,\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}=l_{r1}\right\}\cup\left\{\vec{x}\,/,\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}=l_{r2}\right\}\right]$$

$$C.L.\quad \alpha_1\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial\theta}-\beta_1 T(r,\theta)\bigg|_{\substack{\theta\in[\theta_1,\theta_2]\\ r=l_{r1}}}=0 \quad \alpha_2\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial\theta}+\beta_2 T(r,\theta)\bigg|_{\substack{\theta\in[\theta_1,\theta_2]\\ r=l_{r2}}}=0$$

conditions mixtes radiales licites avec coefficients constants

$$T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_1\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}}=f_{1r}(r) \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_2\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}}=f_{2r}(r)$$

Dans ce cas il convient de trouver un système de fonctions propres dans la dimension radiale permettant un développement en série. Ce n'est pas le cas avec les fonctions $R(r)=A\,r^{\nu}+B\,r^{-(\nu+2\lambda)}$
On a déjà vu que la partie radiale se présente ainsi :

$$Posons\ \lambda=\frac{n-2}{2}\Rightarrow R(r)=\frac{A\,Cos(\nu\,Log(r))+B\,Sin(\nu\,Log(r))}{r^{\lambda}}.$$

Les fonctions radiales de valeur propres nulle sont de la forme : $R(r)=A+\frac{B}{r^{2\lambda}}$
et pour la partie angulaire, comme suit:

$$\Theta(z)=(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\left(A\,P^{\pm\frac{2\lambda-1}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+B\,Q^{\pm\frac{2\lambda-1}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right)\Rightarrow choix-\frac{2\lambda-1}{2}=\frac{1-2\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow\Theta(z)=(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\left(A\,P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+B\,Q^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right).$$

La partie angulaire est donc une fonction conique de Mehler ! Nous avons ainsi trouvé des fonctions oscillantes, il suffit alors de contraindre ces fonctions à respecter les conditions aux limites radiales.

Soit pour une fonction sinusoïdales s'annulant en lr1 et lr2, on trouve immédiatement :

$$\alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \quad Conditions\ R(l_{r1})=R(l_{r2})=0\Rightarrow\tau\,Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)=n\,\pi\Leftrightarrow\tau\,\alpha=n\,\pi$$

$$R_n(r)=\frac{1}{r^{\lambda}}Sin\left(\frac{n\,\pi\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right) \quad ou\,bien \quad R_n(r)=\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda}Sin\left(\frac{n\,\pi\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right).$$

Pour une condition de Neumann de part et d'autre :

$$Conditions\ \frac{dR(l_{r1})}{dr}=0 \quad et \quad \frac{dR(l_{r2})}{dr}=0 \quad Posons \quad t=Log(r) \quad t_1=Log(l_{r1}) \quad t_2=Log(l_{r2})\rightarrow \tau=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$$

$$\alpha=t_2-t_1=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)\rightarrow \tau=\frac{(t-t_1)}{\alpha}\rightarrow t=t_1+\alpha\,\tau \Leftrightarrow \alpha\,\tau=Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)$$

$$Conditions\ \frac{dR(l_{r1})}{dr}=\frac{dR(l_{r2})}{dr}=0 \Leftrightarrow \frac{dR(0)}{d\tau}=\frac{dR(1)}{d\tau}=0$$

$$R(t)=e^{-\lambda t}\left(C\,Cos(\nu\,t)+D\,Sin(\nu\,t)\right)\Rightarrow R(\tau)=\frac{e^{-\alpha\,\lambda\tau}}{l_{r1}^{\ \lambda}}\left(A\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)+B\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right) \quad R_r^{'}(r)=\frac{R_\tau^{'}(t)}{r}=\frac{R_\tau^{'}(\tau)}{\alpha\,r}$$

$$\Rightarrow Conditions\ R'(\tau)=0 \quad R_\tau^{'}(\tau)=\frac{\alpha}{l_{r1}^{\ \lambda}}e^{-\alpha\,\lambda\tau}\left(\nu\left(-ASin(\nu\,\alpha\,\tau)+BCos(\nu\,\alpha\,\tau)\right)-\lambda\left(A\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)+B\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)\right)$$

$$R_\tau^{'}(\tau)=\frac{\alpha}{l_{r1}^{\ \lambda}}e^{-\alpha\,\lambda\tau}\left(Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\left(B\,\nu-\lambda A\right)-Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\left(A\,\nu+\lambda B\right)\right)$$

$$\Rightarrow Conditions\ R_\tau^{'}(0)=R_\tau^{'}(1)\Rightarrow A=B=0 \quad sauf\ si\ Sin(\nu\,\alpha)=0\Rightarrow \nu\,\alpha=n\,\pi$$

$$Dans\,ce\,cas\ R_\tau^{'}(0)=0\Rightarrow B\,\nu-\lambda A=0\Rightarrow A=\frac{B\,\nu}{\lambda}$$

$$R(\tau)=\frac{e^{-\alpha\,\lambda\tau}}{l_{r1}^{\ \lambda}}\left(\frac{\nu}{\lambda}Cos(\nu\,\alpha\,\tau)+Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)\Rightarrow \nu=\frac{n\,\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}$$

$$R_n(r)=\frac{1}{r^{\lambda}}\left(\frac{n\,\pi}{\lambda Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}Cos\left(\frac{n\,\pi\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)+Sin\left(\frac{n\,\pi\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)\right)$$

$$ou\,bien \quad R_n(r)=\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda}\left(\frac{n\,\pi}{\lambda Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}Cos\left(\frac{n\,\pi\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)+Sin\left(\frac{n\,\pi\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)\right)$$

Pour des conditions de Dirichlet en bas et de Neumann en haut :

$$Conditions\ R(l_{r1})=0 \quad et \quad \frac{dR(l_{r2})}{dr}=0$$

$$\Leftrightarrow R(0)=0 \quad \Rightarrow A=0 \Rightarrow R(\tau)=\frac{1}{l_{r1}^{\lambda}}e^{-\lambda\alpha\tau}Sin(\nu\,\alpha\,\tau) \quad et \quad R'(\tau)=\frac{\alpha}{l_{r1}^{\lambda}}e^{-\lambda\alpha\tau}\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)-\lambda Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$\Rightarrow Conditions\ R'(1)=0 \Rightarrow \nu \quad tq \quad \lambda\,Sin(\nu\,\alpha)=\nu\,Cos(\nu\,\alpha)$$

$$\nu\to\nu_n \Rightarrow R(\tau)=\frac{1}{l_{r1}^{\lambda}}e^{-\lambda\alpha\tau}Sin(\nu_n\,\alpha\,\tau) \quad \Leftrightarrow \alpha\,\tau=Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)$$

Il vient

$$\alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \quad \nu_n \quad tq \quad \lambda\,Sin(\nu\,\alpha)=\nu\,Cos(\nu\,\alpha)$$

$$R_n(r)=\frac{1}{r^{\lambda}}Sin\left(\nu_n\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) \quad ou\,bien \quad R_n(r)=\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda}Sin\left(\nu_n\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)$$

Et enfin pour des conditions de Dirichlet en haut et de Neumann en bas :

$$Conditions\ \frac{dR(l_{r1})}{dr}=0 \quad et \quad R(l_{r2})=0$$

$$Posons \quad t=Log(r) \quad t_1=Log(l_{r1}) \quad t_2=Log(l_{r2})\to\tau=\frac{t_2-t}{t_2-t_1}$$

$$\alpha=t_2-t_1=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)\to\tau=\frac{t_2-t}{\alpha}\to t=t_2-\alpha\,\tau \Leftrightarrow \alpha\,\tau=Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)$$

$$Conditions\ \frac{dR(l_{r1})}{dr}=0 \quad et \quad R(l_{r2})=0 \Leftrightarrow R(0)=0 \quad et \quad \frac{dR(1)}{d\tau}=0$$

$$R(r)=\frac{1}{r^{\lambda}}\left(C\,Cos\left(\nu\,Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right)+D\,Sin\left(\nu\,Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right)\right) \Leftrightarrow R(\tau)=\frac{1}{l_{r2}^{\lambda}}e^{\alpha\lambda\tau}\left(A\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)+B\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$R'(r)=-\frac{R'(\tau)}{\alpha\,r} \Rightarrow Conditions\ R'(\tau)=0$$

$$R'(\tau)=\frac{\alpha}{l_{r2}^{\lambda}}e^{\alpha\lambda\tau}\left(\nu\left(-A Sin(\nu\,\alpha\,\tau)+B Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\right)+\lambda\left(A\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)+B\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)\right)$$

$$R'(\tau)=\frac{\alpha}{l_{r2}^{\lambda}}e^{\alpha\lambda\tau}\left(Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\left(B\,\nu+\lambda\,A\right)+Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\left(\lambda\,B-A\,\nu\right)\right)$$

$$R(0)=0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow R'(\tau)=\frac{\alpha}{l_{r2}^{\lambda}}e^{\alpha\lambda\tau}B\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)+\lambda\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$\frac{dR(1)}{d\tau}=0 \Rightarrow \lambda\,Sin(\nu\,\alpha)=-\nu\,Cos(\nu\,\alpha)$$

$$R(\tau)=e^{\alpha\lambda\tau}Sin(\nu\,\alpha\,\tau) \Rightarrow Il\,vient \quad \nu_n \quad tq \quad \lambda\,Sin(\nu_n\,\alpha)=-\nu_n\,Cos(\nu_n\,\alpha) \quad \alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)$$

$$R_n(r)=\frac{1}{r^{\lambda}}Sin\left(\nu_n\,Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right) \quad ou\,bien \quad R_n(r)=\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda}Sin\left(\nu_n\,Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right)$$

Orthogonalité et normalisation des fonctions propres radiales construites

On peut se convaincre facilement de l'orthogonalité en appliquant directement les résultats d'un système de Sturm-Liouville :

$$\lambda = \frac{n-2}{2} \quad \mu^2 = \nu^2 + \lambda^2 \quad \frac{1}{r^{2\lambda+1}}\frac{d}{dr}\left(r^{2\lambda+1}\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left(\nu^2 + \lambda^2\right)\frac{R(r)}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r^{2\lambda-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{2\lambda+1}\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left(\nu^2 + \lambda^2\right)R(r) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{r^{2\lambda-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{2\lambda+1}\frac{dR(r)}{dr}\right) = \left(\nu^2 + \lambda^2\right)R(r)$$

$$Système\ de\ Sturm - Liouville$$

$$L\left(R(r)\right) = \frac{1}{w(r)}\left(-\frac{d}{dr}\left(p(r)\frac{dR(r)}{dr}\right) + s(r)\right) \quad Equation\ aux\ valeurs\ propres\ \omega \rightarrow L\left(R(r)\right) = \omega\, R(r)$$

$$\Rightarrow w(r) = r^{2\lambda-1} \quad p(r) = r^{2\lambda+1} \quad s(r) = 0 \quad \omega = \mu^2 = \nu^2 + \lambda^2$$

Il vient alors la propriété :

$$R_n(r) \rightarrow \Phi_n^r(r)$$

$$\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1}\Phi_n^r(r)\Phi_m^r(r) = \left\|\Phi_n^r(r)\right\|^2 \delta_{n,m} \Rightarrow \left\|\Phi_n^r(r)\right\|^2 = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1}\left(\Phi_n^r(r)\right)^2$$

On va calculer les normes des fonctions propres directement par leur intégrale, mais avant exprimons des intégrales avec les fonctions propres radiales et une fonction quelconque sous la forme normalisée suivante avec le poids calculé :

$$\left.\begin{array}{l} R_n(r) = \dfrac{\Psi_n(r)}{r^\lambda} \\ f(r) \propto \dfrac{g(r)}{r^\lambda} \end{array}\right\} \quad I = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1} f(r) R_n(r) \quad \Psi_n(r) \propto A_n Cos\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + B_n Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)$$

$$\Psi_n(\tau) = A_n Cos(\nu_n \alpha\, \tau) + B_n Sin(\nu_n \alpha\, \tau) \qquad r' = \frac{r}{l_{r1}} \rightarrow e^t = r' \rightarrow \tau = \frac{t}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} \quad \alpha = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \Leftrightarrow t = \alpha\, \tau$$

$$I = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1} f(r) R_n(r) = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1}\frac{g(r)}{r^{2\lambda}}\Psi_n(r) = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr \frac{g(r)}{r}\Psi_n(r) = \int_1^{l_{r2}/l_{r1}} dr' \frac{g(r')}{r'}\Psi_n(r') = \int_0^{Log(l_{r2}/l_{r1})} dt\, g(t)\Psi_n(t)$$

$$I = \alpha\int_0^1 d\tau\, g(\tau)\Psi_n(\tau)$$

Cette intégrale est valable quelque soit les valeurs propres et fonctions propres associées de nos différents problèmes sur le cône. Appliquons cette série de transformation à la fonction propre elle-même :

$$\nu_n = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}$$

$$\left.\begin{aligned} R_n(r) &= \frac{1}{r^\lambda} Sin\left(\nu_n \, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) \\ f(r) &= \frac{1}{r^\lambda} Sin\left(\nu_n \, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) \end{aligned}\right\} \quad I = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1} R_n(r)^2 = \alpha \int_0^1 d\tau \left(\Psi_n(\tau)\right)^2 \quad avec \quad \Psi_n(\tau) = Sin(n\pi\tau)$$

$$Il\ vient \quad I = \alpha \int_0^1 d\tau \left(Sin(n\pi\tau)\right)^2 = \frac{\alpha}{2} = \frac{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}{2}$$

.

En l'appliquant à la forme Cosinus :

$$\nu_n = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} \quad \left.\begin{aligned} R_n(r) &= \frac{1}{r^\lambda} Sin\left(\nu_n \, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) \\ f(r) &= \frac{1}{r^\lambda} Cos\left(\nu_n \, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) \end{aligned}\right\} \quad I = \alpha \int_0^1 d\tau\, Cos(n\pi\tau) Sin(n\pi\tau) = \frac{\alpha}{2} \int_0^1 d\tau\, Sin(2n\pi\tau) = 0$$

Cela permet d'appliquer le résultat avec une combinaison de fonctions sinusoïdales lorsque le jeu de valeurs propres est identiques. Deux résultats peuvent donc être donnés :

$$Conditions\ de\ Dirichlet\ R_n(l_{r1}) = R_n(l_{r2}) = 0 \Rightarrow R_n(r) = \frac{1}{r^\lambda} Sin\left(\frac{n\pi\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right) \Rightarrow \left\|R_n(r)\right\|^2 = \frac{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}{2}$$

$$Conditions\ de\ Neumann \frac{dR_n(l_{r1})}{dr} = \frac{dR_n(l_{r2})}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow R_n(r) = \frac{1}{r^\lambda}\left(\frac{n\pi}{\lambda\, Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} Cos\left(\frac{n\pi\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right) + Sin\left(\frac{n\pi\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)\right)$$

$$Soit\ R_n(r) = \frac{1}{r^\lambda}\left(A_n Cos\left(\frac{n\pi\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right) + B_n Sin\left(\frac{n\pi\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)\right) \Rightarrow \left\|R_n(r)\right\|^2 = \frac{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}{2}\left(A_n^{\ 2} + B_n^{\ 2}\right)$$

$$A_n = \frac{n\pi}{\lambda\, Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} \quad et \quad B_n = 1 \Rightarrow \left\|R_n(r)\right\|^2 = \frac{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}{2}\left(1 + n^2\pi^2\left[\lambda\, Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)\right]^{-2}\right)$$

.

Pour les problèmes combinés, conditions de Dirichlet en bas et de Neumann en haut :

$$Conditions\ R(l_{r1}) = 0 \quad et \quad \frac{dR(l_{r2})}{dr} = 0$$

$$\nu_n \quad tq \quad \lambda\, Sin(\nu_n\alpha) = \nu_n\, Cos(\nu_n\alpha) \quad R_n(r) = \frac{1}{r^\lambda} Sin\left(\nu_n\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)$$

$$I = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1} R_n(r)^2 = \alpha \int_0^1 d\tau\, (\Psi_n(\tau))^2 \quad avec \quad \Psi_n(\tau) = Sin(\nu_n\alpha\,\tau)$$

$$\|R_n(r)\|^2 = \alpha \int_0^1 d\tau\, (Sin(\nu_n\alpha\,\tau))^2 = \frac{\alpha}{2}\int_0^1 d\tau\, (1 - Cos(2\nu_n\alpha\,\tau))$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left[\tau - \frac{Sin(2\nu_n\alpha\,\tau)}{2\nu_n\alpha}\right]_0^1 = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{Sin(2\nu_n\alpha)}{2\nu_n\alpha}\right) = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{Sin(\nu_n\,\alpha)Cos(\nu_n\alpha)}{\nu_n\alpha}\right)$$

$$\|R_n(r)\|^2 = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{Cos(\nu_n\alpha)^2}{\lambda\,\alpha}\right) \quad mais\ aussi \quad \|R_n(r)\|^2 = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\lambda\, Sin(\nu_n\alpha)^2}{\alpha\nu_n^{\ 2}}\right)$$

Avec le problème combiné, Conditions de Dirichlet en haut et de Neumann en bas, on change l'intégration :

$$\left.\begin{array}{l} R_n(r) = \dfrac{\Psi_n(r)}{r^\lambda} \\ f(r) \propto \dfrac{g(r)}{r^\lambda} \end{array}\right\} \quad I = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1} f(r) R_n(r) \quad \Psi_n(r) \propto A_n Cos\left(\nu_n Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right) + B_n Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right)$$

$$\Psi_n(\tau) = A_n Cos(\nu_n\alpha\,\tau) + B_n Sin(\nu_n\alpha\,\tau)$$

$$r' = \frac{r}{l_{r2}} \to e^t = r' \to \tau = -\frac{t}{Log\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} \quad \alpha = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \Leftrightarrow t = -\alpha\,\tau$$

$$I = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1} f(r) R_n(r) = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1} \frac{g(r)}{r^{2\lambda}} \Psi_n(r) = \int_{l_{r1}/l_{r2}}^{1} dr' \frac{g(r')}{r'} \Psi_n(r') = \int_{-Log(l_{r2}/l_{r1})}^{0} dt\, g(t)\Psi_n(t) = \alpha\int_0^1 d\tau\, g(\tau)\Psi_n(\tau)$$

$$\Psi_n(\tau) = A_n Cos(\nu_n\alpha\,\tau) + B_n Sin(\nu_n\alpha\,\tau)$$

En conséquence la norme est égale à :

$$Conditions\ \frac{dR(l_{r1})}{dr} = 0 \quad et \quad R(l_{r2}) = 0$$

$$\nu_n \quad tq \quad \lambda\, Sin(\nu_n\alpha) = -\nu_n\, Cos(\nu_n\alpha)$$

$$R_n(r) = \frac{1}{r^\lambda} Sin\left(\nu_n\, Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right) \Rightarrow I = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1} R_n(r)^2 = \alpha\int_0^1 d\tau\, (\Psi_n(\tau))^2 \quad avec \quad \Psi_n(\tau) = Sin(\nu_n\alpha\,\tau)$$

$$\|R_n(r)\|^2 = \alpha\int_0^1 d\tau\, (Sin(\nu_n\alpha\,\tau))^2 = \frac{\alpha}{2}\int_0^1 d\tau\, (1 - Cos(2\nu_n\alpha\,\tau)) = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{Sin(2\nu_n\alpha)}{2\nu_n\alpha}\right) = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{Sin(\nu_n\,\alpha)Cos(\nu_n\alpha)}{\nu_n\alpha}\right)$$

$$\|R_n(r)\|^2 = \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{Cos(\nu_n\alpha)^2}{\lambda\,\alpha}\right) \quad mais\ aussi \quad \|R_n(r)\|^2 = \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{\lambda\, Sin(\nu_n\alpha)^2}{\alpha\nu_n^{\ 2}}\right)$$

.

Calcul des normes en théorie de Sturm-Liouville

Dans le cadre d'un problème de Sturm-Liouville régulier, avec pour valeur propre ω :

$r \in [l_{r1}, l_{r2}] \quad p(r) > 0 \quad w(r) > 0$

$$-\frac{d}{dr}\left(p(r)\frac{d\Phi_\omega(r)}{dz}\right) + [s(r) - \omega\, w(r)]\Phi_\omega(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dr}\left(p(r)\frac{d\Phi_\omega(r)}{dr}\right) + [\omega\, w(r) - s(r)]\Phi_\omega(r) = 0$$

$\omega \quad valeur\ propre\ de\ l'\ opérateur\ de\ Sturm - Liouville$

Les normes se calculent de la manière suivante :

$$\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, w(r)\Phi_\omega(r)^2 = \left[p(r)\left(\frac{\partial\Phi_\omega(r)}{\partial r}\frac{\partial\Phi_\omega(r)}{\partial\omega} - \Phi_\omega(r)\frac{\partial^2\Phi_\omega(r)}{\partial\omega\partial r}\right)\right]_{l_{r1}}^{l_{r2}}$$

On rappelle d'autre part que la valeur propre de l'opérateur de Sturm-Liouville dans notre problème était transformée de la manière suivante :

$\mu^2 = \omega = -p(p + 2\lambda)\ \ forme\ de\ Legendre$

$$Cas\ 4\lambda^2 - 4\omega < 0 \rightarrow p == -\frac{1}{2} + i\sqrt{\omega - \lambda^2} \quad En\ posant\ \nu = \sqrt{\omega - \lambda^2} \Rightarrow p = -\frac{1}{2} + i\,\nu$$

En conséquence les dérivées paramétriques sur les valeurs propres changent de nature :

$En\ posant\ \nu = \sqrt{\omega - \lambda^2} \Rightarrow \omega = \nu^2 + \lambda^2 \Rightarrow d\omega = 2\nu d\nu$

Appliquons ces formules à notre problème, il vient :

$p(r) = r^{2\lambda+1} \quad w(r) = r^{2\lambda-1} \quad \Phi_\omega(r) \rightarrow R_\nu(r)$

$$\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1} R_\nu(r)^2 = \frac{1}{2\nu}\left[r^{2\lambda+1}\left(\frac{\partial R_\nu(r)}{\partial r}\frac{\partial R_\nu(r)}{\partial\nu} - R_\nu(r)\frac{\partial^2 R_\nu(r)}{\partial\nu\partial r}\right)\right]_{l_{r1}}^{l_{r2}}.$$

Rappelons également les valeurs des dérivées premières en coordonnées et en paramètres pour une des formes des fonctions propres :

$$Posons \quad t = Log(r) \quad t_1 = Log(l_{r1}) \quad t_2 = Log(l_{r2}) \rightarrow \tau = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \quad \alpha = t_2 - t_1 = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)$$

$$\rightarrow \tau = \frac{(t - t_1)}{\alpha} \rightarrow t = t_1 + \alpha\,\tau \Leftrightarrow \alpha\,\tau = Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right) \Leftrightarrow r = l_{r1}e^{\alpha\tau}$$

$$Posons\ R'_{\nu,r}(r) = \frac{\partial R_\nu(r)}{\partial r} \quad et \quad R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial\tau} \quad et \quad R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial\nu}$$

$$R_\nu(r) = \frac{1}{r^\lambda}\left(A\,Cos\left(\nu\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + B\,Sin\left(\nu\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right) \Rightarrow \quad R'_{\nu,r}(r) = \frac{R'_{\nu,\tau}(\tau)}{\alpha\,r} = \frac{R'_{\nu,\tau}(\tau)e^{-\alpha\tau}}{\alpha\,l_{r1}}$$

$$R_\nu(\tau) = \frac{1}{l_{r1}^{\ \lambda}}e^{-\lambda\alpha\tau}\left(A\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) + B\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\alpha}{l_{r1}^{\ \lambda}}e^{-\lambda\alpha\tau}\left(Cos(\nu\,\alpha\,\tau)(B\nu - \lambda\,A) - Sin(\nu\,\alpha\,\tau)(A\nu + \lambda\,B)\right)$$

$$R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\alpha\,\tau}{l_{r1}^{\ \lambda}}e^{-\lambda\alpha\tau}\left(-A\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau) + B\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial\nu\,\partial\tau} = \frac{\partial R'_{\nu,\tau}(\tau)}{\partial\nu} = \frac{\alpha}{l_{r1}^{\ \lambda}}e^{-\lambda\alpha\tau}\left(\left(B\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) - A\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right) - \alpha\,\tau\left(Sin(\nu\,\alpha\,\tau)(B\nu - \lambda\,A) + Cos(\nu\,\alpha\,\tau)(A\nu + \lambda\,B)\right)\right)$$

.

Exprimons la norme à l'aide de la variable normalisée τ, il vient :

$$\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1} R_\nu(r)^2 = \frac{1}{2\nu}\left[r^{2\lambda+1}\left(\frac{\partial R_\nu(r)}{\partial r}\frac{\partial R_\nu(r)}{\partial \nu} - R_\nu(r)\frac{\partial^2 R_\nu(r)}{\partial \nu \partial r}\right)\right]_{l_{r1}}^{l_{r2}}$$

$$Posons\ R'_{\nu,r}(r) = \frac{\partial R_\nu(r)}{\partial r} \quad et \quad R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \tau}\ et \quad R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \nu} \quad r = l_{r1}e^{\alpha\tau} \Rightarrow r^{2\lambda+1} = l_{r1}^{\ 2\lambda+1}e^{\alpha(2\lambda+1)\tau}$$

$$R'_{\nu,r}(r) = \frac{R'_{\nu,\tau}(\tau)e^{-\alpha\tau}}{\alpha\, l_{r1}} \quad et \quad \frac{\partial^2 R_\nu(r)}{\partial \nu \partial r} = \frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha\, l_{r1}}\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial \nu \partial \tau} \Rightarrow \left\|R_\nu(r)\right\|^2 = \frac{l_{r1}^{\ 2\lambda}}{2\alpha\,\nu}\left[e^{2\lambda\alpha\tau}\left(\frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \nu} - R_\nu(\tau)\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial \nu \partial \tau}\right)\right]_0^1$$

$$\left\|R_\nu(r)\right\|^2 = \frac{l_{r1}^{\ 2\lambda}}{2\alpha\,\nu}\left[e^{2\lambda\alpha\tau}\left(R'_{\nu,\tau}(\tau)R'_{\nu,\nu}(\tau) - R_\nu(\tau)\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial \nu \partial \tau}\right)\right]_0^1$$

Retrouvons alors les résultats des normes dans le cas de Dirichlet de part et d'autres :

$$Condition\ de\ Dirichlet \Rightarrow \left[R_\nu(\tau)\right]_0^1 = 0 \quad et \quad \left[Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right]_0^1 = 0 \quad \left[Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\right]_0^1 = \pm 1 \Rightarrow \left[Cos^2(\nu\,\alpha\,\tau)\right]_0^1 = 1$$

$$A = 0, B = 1$$

$$R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\alpha}{l_{r1}^{\ \lambda}}e^{-\lambda\alpha\tau}\nu\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) \quad R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\alpha\,\tau}{l_{r1}^{\ \lambda}}e^{-\lambda\alpha\tau}Cos(\nu\,\alpha\,\tau) \Rightarrow \left\|R_\nu(r)\right\|^2 = \frac{\alpha}{2}\left[\ \tau\,Cos^2(\nu\,\alpha\,\tau)\right]_0^1 = \frac{\alpha}{2}$$

.

Dans le cas Dirichlet en bas et Neumann en haut, il vient :

$$R_\nu(0) = 0 \quad et \quad R'_{\nu,\tau}(1) = 0$$

$$\nu_n \quad tq \quad \lambda\,Sin(\nu_n\alpha) = \nu_n\,Cos(\nu_n\alpha) \quad A = 0, B = 1 \Rightarrow R_\nu(\tau) = \frac{1}{l_{r1}^{\ \lambda}}e^{-\lambda\alpha\tau}Sin(\nu\,\alpha\,\tau)$$

$$\Rightarrow R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\alpha}{l_{r1}^{\ \lambda}}e^{-\lambda\alpha\tau}\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) - \lambda\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right) \quad R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\alpha\,\tau}{l_{r1}^{\ \lambda}}e^{-\lambda\alpha\tau}Cos(\nu\,\alpha\,\tau)$$

$$\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial \nu \partial \tau} = \frac{\alpha\,e^{-\lambda\alpha\tau}}{l_{r1}^{\ \lambda}}\left(\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\left(1-\lambda\,\alpha\,\tau\right) - \nu\,\alpha\,\tau\ Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$\Rightarrow R'_{\nu,\tau}(0) = \frac{\alpha}{l_{r1}^{\ \lambda}}\nu \quad R'_{\nu,\nu}(0) = 0 \quad \frac{\partial^2 R_\nu(0)}{\partial \nu \partial \tau} = \frac{\alpha}{l_{r1}^{\ \lambda}}$$

$$R'_{\nu,\tau}(1) = \frac{e^{-\lambda\alpha}}{l_{r1}^{\ \lambda}}\alpha\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha) - \lambda\,Sin(\nu\,\alpha)\right) \quad R'_{\nu,\nu}(1) = \frac{e^{-\lambda\alpha}}{l_{r1}^{\ \lambda}}\alpha\,Cos(\nu\,\alpha)$$

$$R_\nu(1) = \frac{e^{-\lambda\alpha}}{l_{r1}^{\ \lambda}}Sin(\nu\,\alpha) \quad \frac{\partial^2 R_\nu(1)}{\partial \nu \partial \tau} = \frac{e^{-\lambda\alpha}}{l_{r1}^{\ \lambda}}\alpha\left(\,Cos(\nu\,\alpha)\left(1-\lambda\,\alpha\right) - \nu\ \alpha\,Sin(\nu\,\alpha)\right)$$

$$\left\|R_\nu(r)\right\|^2 = \frac{l_{r1}^{\ 2\lambda}}{2\alpha\,\nu}\left[e^{2\lambda\alpha\tau}\left(R'_{\nu,\tau}(\tau)R'_{\nu,\nu}(\tau) - R_\nu(\tau)\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial \nu \partial \tau}\right)\right]_0^1 = \frac{l_{r1}^{\ 2\lambda}}{2\alpha\,\nu}e^{2\lambda\alpha}\left(R'_{\nu,\tau}(1)R'_{\nu,\nu}(1) - R_\nu(1)\frac{\partial^2 R_\nu(1)}{\partial \nu \partial \tau}\right)$$

$$= \frac{1}{2\alpha\,\nu}\left(\alpha\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha) - \lambda\,Sin(\nu\,\alpha)\right)\alpha\,Cos(\nu\,\alpha) - Sin(\nu\,\alpha)\alpha\left(\,Cos(\nu\,\alpha)\left(1-\lambda\,\alpha\right) - \nu\ \alpha\,Sin(\nu\,\alpha)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\nu}\left(\,\nu\,\alpha - Sin(\nu\,\alpha)\,Cos(\nu\,\alpha)\right) = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{Sin(\nu\,\alpha)\,Cos(\nu\,\alpha)}{\nu\,\alpha}\right)$$

.

Ce qui est le résultat déjà trouvé en calculant directement l'intégrale !

Rappelons également les valeurs des dérivées premières en coordonnées et en paramètres pour la deuxième forme choisie des fonctions propres (cas Neumann en bas et Dirichlet en haut):

$$Posons \quad t = Log(r) \quad t_1 = Log(l_{r1}) \quad t_2 = Log(l_{r2}) \rightarrow \tau = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \quad \alpha = t_2 - t_1 = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)$$

$$\rightarrow \tau = \frac{t_2 - t}{\alpha} \rightarrow t = t_2 - \alpha\,\tau \Leftrightarrow \alpha\,\tau = Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right) \Leftrightarrow r = l_{r2}e^{-\alpha\tau} \quad Posons\ R'_{\nu,r}(r) = \frac{\partial R_\nu(r)}{\partial r} \quad et$$

$$R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \tau} \quad et \quad R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \nu} \quad R_\nu(r) = \frac{1}{r^\lambda}\left(A\,Cos\left(\nu\,Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right) + B\,Sin\left(\nu\,Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad R'_{\nu,r}(r) = -\frac{R'_{\nu,\tau}(\tau)}{\alpha\,r} = -\frac{R'_{\nu,\tau}(\tau)e^{\alpha\tau}}{\alpha\,l_{r2}} \quad R_\nu(\tau) = \frac{1}{l_{r2}{}^\lambda}e^{\lambda\alpha\tau}\left(A\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) + B\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\alpha}{l_{r2}{}^\lambda}e^{\lambda\alpha\tau}\left(Cos(\nu\,\alpha\,\tau)(B\nu + \lambda\,A) - Sin(\nu\,\alpha\,\tau)(A\nu - \lambda\,B)\right) \quad R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\alpha\,\tau}{l_{r2}{}^\lambda}e^{\lambda\alpha\tau}\left(-A\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau) + B\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial\nu\,\partial\tau} = \frac{\partial R'_{\nu,\tau}(\tau)}{\partial\nu} = \frac{\alpha}{l_{r2}{}^\lambda}e^{\lambda\alpha\tau}\left(\left(B\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) - A\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right) - \alpha\,\tau\left(Sin(\nu\,\alpha\,\tau)(B\nu + \lambda\,A) + Cos(\nu\,\alpha\,\tau)(A\nu - \lambda\,B)\right)\right)$$

Exprimons la norme à l'aide de la variable normalisée τ, il vient :

$$Posons\ R'_{\nu,r}(r) = \frac{\partial R_\nu(r)}{\partial r} \quad et \quad R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial\tau}\,et \quad R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial\nu} \quad r = l_{r2}e^{-\alpha\tau}$$

$$r^{2\lambda+1} = l_{r2}{}^{2\lambda+1}e^{-\alpha(2\lambda+1)\tau} \quad R'_{\nu,r}(r) = \frac{R'_{\nu,\tau}(\tau)e^{\alpha\tau}}{\alpha\,l_{r2}} \quad et \quad \frac{\partial^2 R_\nu(r)}{\partial\nu\partial r} = -\frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha\,l_{r2}}\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial\nu\partial\tau}$$

$$\left\|R_\nu(r)\right\|^2 = -\frac{l_{r2}{}^{2\lambda}}{2\alpha\,\nu}\left[e^{-2\lambda\alpha\tau}\left(\frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial\nu} - R_\nu(\tau)\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial\nu\partial\tau}\right)\right]_1^0$$

$$\Rightarrow \left\|R_\nu(r)\right\|^2 = \frac{l_{r2}{}^{2\lambda}}{2\alpha\,\nu}\left[e^{-2\lambda\alpha\tau}\left(R'_{\nu,\tau}(\tau)R'_{\nu,\nu}(\tau) - R_\nu(\tau)\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial\nu\partial\tau}\right)\right]_0^1$$

Dans le cas Dirichlet en haut et Neumann en bas , il vient :

$$R_\nu(0) = 0 \quad et \quad R'_{\nu,\tau}(1) = 0 \quad \nu_n \quad tq \quad Sin(\nu_n\alpha) = -2\nu_n\,Cos(\nu_n\alpha) \quad A = 0, B = 1$$

$$\Rightarrow R_\nu(\tau) = \frac{1}{l_{r2}{}^\lambda}e^{\lambda\alpha\tau}Sin(\nu\,\alpha\,\tau) \quad R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\alpha}{l_{r2}{}^\lambda}e^{\lambda\alpha\tau}\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) + \lambda\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\alpha\,\tau}{l_{r2}{}^\lambda}e^{\lambda\alpha\tau}Cos(\nu\,\alpha\,\tau) \quad \frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial\nu\partial\tau} = \frac{\alpha\,e^{\lambda\alpha\tau}}{l_{r2}{}^\lambda}\left(Cos(\nu\,\alpha\,\tau)(1 + \lambda\,\alpha\,\tau) - \nu\,\alpha\,\tau\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$\Rightarrow R'_{\nu,\tau}(0) = \frac{\alpha}{l_{r2}{}^\lambda}\nu \quad R'_{\nu,\nu}(0) = 0 \quad \frac{\partial^2 R_\nu(0)}{\partial\nu\partial\tau} = \frac{\alpha}{l_{r2}{}^\lambda} \quad R'_{\nu,\tau}(1) = \frac{e^{\lambda\alpha}}{l_{r2}{}^\lambda}\alpha\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha) + \lambda\,Sin(\nu\,\alpha)\right)$$

$$R'_{\nu,\nu}(1) = \frac{e^{\lambda\alpha}}{l_{r2}{}^\lambda}\alpha\,Cos(\nu\,\alpha) \quad R_\nu(1) = \frac{e^{\lambda\alpha}}{l_{r2}{}^\lambda}Sin(\nu\,\alpha) \quad \frac{\partial^2 R_\nu(1)}{\partial\nu\partial\tau} = \frac{e^{\lambda\alpha}}{l_{r2}{}^\lambda}\alpha\left(Cos(\nu\,\alpha)(1 + \lambda\,\alpha) - \nu\,\alpha\,Sin(\nu\,\alpha)\right)$$

$$\left\|R_\nu(r)\right\|^2 = \frac{l_{r2}{}^{2\lambda}}{2\alpha\,\nu}\left[e^{-2\lambda\alpha\tau}\left(R'_{\nu,\tau}(\tau)R'_{\nu,\nu}(\tau) - R_\nu(\tau)\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial\nu\partial\tau}\right)\right]_0^1 = \frac{l_{r2}{}^{2\lambda}}{2\alpha\,\nu}e^{-2\lambda\alpha}\left(R'_{\nu,\tau}(1)R'_{\nu,\nu}(1) - R_\nu(1)\frac{\partial^2 R_\nu(1)}{\partial\nu\partial\tau}\right)$$

$$= \frac{1}{2\alpha\,\nu}\left(\alpha\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha) + \lambda\,Sin(\nu\,\alpha)\right)\alpha\,Cos(\nu\,\alpha) - Sin(\nu\,\alpha)\alpha\left(Cos(\nu\,\alpha)(1 + \lambda\,\alpha) - \nu\,\alpha\,Sin(\nu\,\alpha)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\nu}\left(\nu\,\alpha - Sin(\nu\,\alpha)\,Cos(\nu\,\alpha)\right) = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{Sin(\nu\,\alpha)\,Cos(\nu\,\alpha)}{\nu\,\alpha}\right)$$

Ce qui est le résultat déjà trouvé en calculant directement l'intégrale !

Il ne reste plus qu'à calculer par ce moyen, la norme pour des conditions homogènes de Neumann de part et d'autre, donnons l'expression la plus générale de la norme quelque soit les coefficients A,B, il vient après une session de calcul sur Mathematica

$$\|R_\nu(r)\|^2 = \frac{1}{2\nu}\left(A\,B + \alpha\,\nu\left(A^2+B^2\right) - A\,B\,Cos(2\alpha\,\nu) - \frac{\left(A^2-B^2\right)}{2} Sin(2\alpha\,\nu)\right)$$

Pour les conditions homogènes de Neumann de part et d'autre, on retrouve la norme calculée.

$$Si\ A = \frac{\nu}{\lambda} \quad et \quad B = 1 \quad et \quad \nu = \frac{n\,\pi}{\alpha} \quad et \quad \alpha = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \quad et \quad Sin(2\alpha\,\nu) = 0 \quad et \quad Cos(2\alpha\,\nu) = 1$$

$$il\ vient : \|R_\nu(r)\|^2 = \frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{\nu^2}{\lambda^2}\right) = \frac{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}{2}\left(1+n^2\pi^2\left[\lambda\,Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)\right]^{-2}\right)$$

Formes des fonctions angulaires associées

Les fonctions angulaires associées sont les suivantes (rappel)

$$\Theta(z) = \left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\left(A\,P^{\pm\frac{2\lambda-1}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z) + B\,Q^{\pm\frac{2\lambda-1}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right)$$

$$P^{\pm\frac{2\lambda-1}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\ Fonction\ de\ Legendre\ de\ degré\ -\frac{1}{2}+i\nu\ et\ d'ordre \quad \pm\frac{2\lambda-1}{2}$$

$$Q^{\pm\frac{2\lambda-1}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z) Fonction\ de\ Legendre\ de\ deuxième\ espèce\ de\ degré\ -\frac{1}{2}+i\nu\ et\ d'ordre \quad \pm\frac{2\lambda-1}{2}$$

Aussi appelées fonctions coniques ou fonctions de Mehler

$$On\ choisit\ l'ordre\ négatif\ -\frac{2\lambda-1}{2} = \frac{1-2\lambda}{2} \quad comme \quad \lambda = \frac{n-2}{2} \Rightarrow \frac{1-2\lambda}{2} = \frac{3-n}{2}$$

Dimension n entière donc l'ordre est un entier négatif ou un demi – entier négatif

Sans oublier la solution de valeur propre nulle des équations séparées:

$$z = Cos(\vartheta) \quad dz = Sin(\vartheta)d\vartheta$$

$$\frac{1}{Sin^{n-2}(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin^{n-2}(\vartheta)\frac{\partial\Theta_0(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\Theta_0(\vartheta)}{d\vartheta^2} + (n-2)\frac{Cos(\vartheta)}{Sin(\vartheta)}\frac{d\Theta_0(\vartheta)}{d\vartheta} = 0$$

$$\frac{\frac{d^2\Theta_0(\vartheta)}{d\vartheta^2}}{\frac{d\Theta_0(\vartheta)}{d\vartheta}} = -(n-2)\frac{Cos(\vartheta)}{Sin(\vartheta)} \Leftrightarrow \frac{d}{d\vartheta}\left(Log\left(\frac{d\Theta_0(\vartheta)}{d\vartheta}\right)\right) = -(n-2)\frac{d}{d\vartheta}(Log(Sin(\vartheta)))$$

$$\Rightarrow Log\left(\frac{d\Theta_0(\vartheta)}{d\vartheta}\right) = -(n-2)Log(Sin(\vartheta)) \Rightarrow \frac{d\Theta_0(\vartheta)}{d\vartheta} = A Sin(\vartheta)^{-(n-2)}$$

$$\Rightarrow \Theta_0(\vartheta) = A + B\int d\vartheta Sin(\vartheta)^{-(n-2)}$$

$$Forme\ générale \quad \Theta_0(\vartheta) = \frac{\left(A_\vartheta P^{\frac{(n-3)}{2}}_{\frac{(n-3)}{2}}(Cos(\vartheta)) + B_\vartheta Q^{\frac{(n-3)}{2}}_{\frac{(n-3)}{2}}(Cos(\vartheta))\right)}{Sin(\vartheta)^{\frac{(n-3)}{2}}}$$

.

Avec comme cas particulier pour les fonctions de valeur propres nulle suivant les dimensions

$$n = 3 \Rightarrow \Theta_0(\theta) = A + B\, Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right) = C + D\, Log\left(CoTan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = E + F\, Log\left(Tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$n = 4 \Rightarrow \Theta_0(\theta) = A + B\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)} = A + B\, CoTan(\theta)$$

$$n = 5 \Rightarrow \Theta_0(\theta) = A + B\frac{Sin^2(\theta) Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right) - 2Cos(\theta)}{Sin^2(\theta)}$$

Que l'on retrouve avec l'expression utilisant la forme générale des fonctions de Legendre associées :

$$\Theta_0(\vartheta) = \frac{\left(A_\vartheta P_{\frac{(n-3)}{2}}^{\frac{(n-3)}{2}}(Cos(\vartheta)) + B_\vartheta Q_{\frac{(n-3)}{2}}^{\frac{(n-3)}{2}}(Cos(\vartheta))\right)}{Sin(\vartheta)^{\frac{(n-3)}{2}}} \rightarrow n = 3 \Rightarrow \Theta_0(\vartheta) = \left(A_\vartheta + B_\vartheta Q_0^0(Cos(\vartheta))\right)$$

$$\Rightarrow \Theta_0(\vartheta) = \left(A_\vartheta - \frac{B_\vartheta}{2} Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right) \quad n = 4 \Rightarrow \Theta_0(\vartheta) = \frac{\left(A_\vartheta P_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(Cos(\vartheta)) + B_\vartheta Q_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(Cos(\vartheta))\right)}{\sqrt{Sin(\vartheta)}}$$

$$P_\nu^{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Cos\left(\left(\nu + \frac{1}{2}\right)Arcos(z)\right)}{\left(1-z^2\right)^{1/4}} \Rightarrow P_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z}{\left(1-z^2\right)^{1/4}} \Rightarrow P_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(Cos(\vartheta)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Cos(\vartheta)}{\sqrt{Sin(\vartheta)}}$$

$$Q_\nu^{\frac{1}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{Sin\left(\left(\nu + \frac{1}{2}\right)Arcos(z)\right)}{\left(1-z^2\right)^{1/4}} \Rightarrow Q_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{Sin(Arcos(z))}{\left(1-z^2\right)^{1/4}} \Rightarrow Q_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(Cos(\vartheta)) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{Sin(\vartheta)}$$

$$\Rightarrow \Theta_0(\vartheta) = \frac{A_\vartheta\sqrt{\frac{2}{\pi}}Cos(\vartheta) - B_\vartheta\sqrt{\frac{\pi}{2}}Sin(\vartheta)}{Sin(\vartheta)} = A + B\frac{Cos(\vartheta)}{Sin(\vartheta)}$$

$$n = 5 \Rightarrow \Theta_0(\vartheta) = \frac{\left(A_\vartheta P_1^1(Cos(\vartheta)) + B_\vartheta Q_1^1(Cos(\vartheta))\right)}{Sin(\vartheta)} \quad P_1^1(z) = -\sqrt{1-z^2} \Rightarrow P_1^1(Cos(\vartheta)) = -Sin(\vartheta)$$

$$Q_1^1(z) = \frac{\left(1-z^2\right)Log\left(\frac{1-z}{1+z}\right) - 2z}{2\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow Q_1^1(Cos(\vartheta)) = \frac{Sin^2(\vartheta)Log\left(\frac{1-Cos(\vartheta)}{1+Cos(\vartheta)}\right) - 2Cos(\vartheta)}{2Sin(\vartheta)}$$

$$\Rightarrow \Theta_0(\vartheta) = \frac{\left(-A_\vartheta Sin(\vartheta) + B_\vartheta\frac{Sin^2(\vartheta)Log\left(\frac{1-Cos(\vartheta)}{1+Cos(\vartheta)}\right) - 2Cos(\vartheta)}{2Sin(\vartheta)}\right)}{Sin(\vartheta)}$$

$$\Rightarrow \Theta_0(\vartheta) = -A_\vartheta + B_\vartheta\frac{Sin^2(\vartheta)Log\left(\frac{1-Cos(\vartheta)}{1+Cos(\vartheta)}\right) - 2Cos(\vartheta)}{2Sin^2(\vartheta)}$$

Hypothèse sur les formes des fonctions angulaires de valeurs propres nulle suivant les valeurs du paramètre dimensionnel λ

En examinant la forme des solutions on peut émettre une hypothèse sur la forme des fonctions angulaires de valeur propre nulle :

$$\Theta_0(\vartheta)=\frac{\left(A_\vartheta P_{\frac{(2\lambda-1)}{2}}^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}(Cos(\vartheta))+B_\vartheta Q_{\frac{(2\lambda-1)}{2}}^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}(Cos(\vartheta))\right)}{Sin(\vartheta)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}}}=\frac{\left(A_\vartheta P_{\frac{(n-3)}{2}}^{\frac{(n-3)}{2}}(Cos(\vartheta))+B_\vartheta Q_{\frac{(n-3)}{2}}^{\frac{(n-3)}{2}}(Cos(\vartheta))\right)}{Sin(\vartheta)^{\frac{(n-3)}{2}}}$$

$$Si\quad \lambda=m+1\Rightarrow\frac{Q_{\frac{(2m+1)}{2}}^{\frac{(2m+1)}{2}}(Cos(\vartheta))}{Sin(\vartheta)^{\frac{(2m+1)}{2}}}\propto Cste\quad Si\quad \lambda=\frac{(2m+1)}{2}\Rightarrow\frac{P_m^m(Cos(\vartheta))}{Sin(\vartheta)^m}\propto Cste$$

.

Pour le montrer, reprenons la construction des polynômes associées de Legendre :

$$P_m^m(z)=(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^m P_m(z)}{\partial z^m}\quad or\quad \frac{\partial^m P_m(z)}{\partial z^m}=Cste$$

$$Plus\ précisément\ \frac{\partial^m P_m(z)}{\partial z^m}=2^m\left(\frac{1}{2}\right)_m C_0^{\frac{(2m+1)}{2}}(z)$$

$$(\alpha)_m=\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}\quad C_0^{\frac{(2m+1)}{2}}(z)=1\ polynôme\ de\ Gegenbauer\ de\ degré\ zéro$$

$$\Rightarrow P_m^m(z)=(-1)^m 2^m\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\Rightarrow P_m^m(Cos(\vartheta))=(-1)^m 2^m\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(Sin^2(\vartheta)\right)^{\frac{m}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{P_m^m(Cos(\vartheta))}{Sin^m(\vartheta)}=(-1)^m 2^m\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}{\sqrt{\pi}}$$

$$De\ plus\quad \lim_{z\to 1}Q_m^m(z)=\infty\Rightarrow\lim_{\theta\to 0}Q_m^m(Cos(\vartheta))=\infty\quad \lim_{\theta\to 0}\frac{Q_m^m(Cos(\vartheta))}{Sin(\vartheta)^m}=\infty$$

Pour ce qui est des fonctions associées de Legendre de deuxième espèce et de degré et d'ordre demi-entier, on émet les hypothèses suivantes,vérifiées d'après la formule suivante :

$$Si \quad \lambda = m+1 \Rightarrow \frac{Q_{\frac{(2m+1)}{2}}^{\frac{(2m+1)}{2}}\left(Cos(\vartheta)\right)}{Sin(\vartheta)^{\frac{(2m+1)}{2}}} \propto Cste \qquad \lim_{\vartheta\to 0}\frac{P_{\frac{(2m+1)}{2}}^{\frac{(2m+1)}{2}}\left(Cos(\vartheta)\right)}{Sin(\vartheta)^{\frac{(2m+1)}{2}}} = \infty$$

$$De\ plus \quad Q_\nu^\nu(z) = \frac{2^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)}\left(1-z^2\right)^{\nu/2}\left(\pi\frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)}\mathrm{B}_{\frac{1-z}{2}}(-\nu,-\nu) - \frac{4^\nu\sqrt{\pi}}{Sin(\pi\nu)}\Gamma(-\nu)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$et \quad P_\nu^\nu(z) = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)}\left(1-z^2\right)^{\nu/2}\mathrm{B}_{\frac{1-z}{2}}(-\nu,-\nu)$$

$$\mathrm{B}_z(\alpha,\beta) \quad fonction\ Beta\ incomplète\ d'Euler = \int_0^z dt\, t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$$

$$\Rightarrow Q_{\frac{(2m+1)}{2}}^{\frac{(2m+1)}{2}}(z) = -(-1)^m 2^{m-\frac{1}{2}}\left(1-z^2\right)^{\frac{(2m+1)}{4}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{(2m+1)}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Q_{\frac{(2m+1)}{2}}^{\frac{(2m+1)}{2}}\left(Cos(\vartheta)\right) = -(-1)^m 2^{m-\frac{1}{2}}\left(Sin^2(\vartheta)\right)^{\frac{(2m+1)}{4}}\sqrt{\pi}\ m! = -(-1)^m 2^{m-\frac{1}{2}}\left(Sin(\vartheta)\right)^{\frac{(2m+1)}{2}}\sqrt{\pi}\ m!$$

$$\Rightarrow \frac{Q_{\frac{(2m+1)}{2}}^{\frac{(2m+1)}{2}}\left(Cos(\vartheta)\right)}{Sin(\vartheta)^{\frac{(2m+1)}{2}}} = -(-1)^m 2^{m-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\ m!$$

$$P_{\frac{(2m+1)}{2}}^{\frac{(2m+1)}{2}}\left(Cos(\vartheta)\right) = \frac{2^{-\frac{(2m+1)}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{(2m+1)}{2}\right)}\left(Sin^2(\vartheta)\right)^{\frac{(2m+1)}{4}}\mathrm{B}_{\frac{1-Cos(\vartheta)}{2}}\left(-\frac{(2m+1)}{2},-\frac{(2m+1)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{P_{\frac{(2m+1)}{2}}^{\frac{(2m+1)}{2}}\left(Cos(\vartheta)\right)}{Sin(\vartheta)^{\frac{(2m+1)}{2}}} = \frac{2^{-\frac{(2m+1)}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{(2m+1)}{2}\right)}\mathrm{B}_{\frac{1-Cos(\vartheta)}{2}}\left(-\frac{(2m+1)}{2},-\frac{(2m+1)}{2}\right)$$

$$\lim_{\vartheta\to 0}\frac{P_{\frac{(2m+1)}{2}}^{\frac{(2m+1)}{2}}\left(Cos(\vartheta)\right)}{Sin(\vartheta)^{\frac{(2m+1)}{2}}} = \frac{2^{-\frac{(2m+1)}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{(2m+1)}{2}\right)}\lim_{z\to 1}\mathrm{B}_{\frac{1-z}{2}}\left(-\frac{(2m+1)}{2},-\frac{(2m+1)}{2}\right) = \infty$$

Toutes les hypothèses ont donc été démontrées !

Pour ce qui est des valeurs propres non nulles et des fonctions angulaires associées, il est facile de démontrer la valeur réelle de la fonction de première espèce, en utilisant la propriété miroir des fonctions de Legendre :

$$\left.\begin{array}{l} P_{\bar{\tau}}^{\bar{\mu}}(\bar{z}) = \overline{P_{\tau}^{\mu}(z)} \\ P_{-\tau}^{\mu}(z) = P_{\tau-1}^{\mu}(z) \end{array}\right\} \Rightarrow \tau = -\frac{1}{2} + i\nu \rightarrow \bar{\tau} = -\frac{1}{2} - i\nu = -\left(\frac{1}{2} + i\nu\right) \rightarrow -(\tau+1)$$

$$\overline{P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{\pm\frac{2\lambda-1}{2}}(x)} = P_{-\frac{1}{2}-i\nu}^{\pm\frac{2\lambda-1}{2}}(x) = P_{-\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)-1}^{\pm\frac{2\lambda-1}{2}}(x) = P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{\pm\frac{2\lambda-1}{2}}(x) \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{\pm\frac{2\lambda-1}{2}}(x) \quad réel$$

Qu'en est -il de la fonction conique de deuxième espèce. Pour cela on rappelle que les fonctions de Legendre de première et deuxième espèce sont reliées par les formules de liaison :

$$P_{\tau}^{\pm\mu}(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{Cos((\tau\pm\mu)\pi)Q_{\tau}^{\pm\mu}(z) + Q_{\tau}^{\pm\mu}(-z)}{Sin((\tau\pm\mu)\pi)} \quad Q_{\tau}^{\pm\mu}(z) = \frac{\pi}{2}\frac{Cos((\tau\pm\mu)\pi)P_{\tau}^{\pm\mu}(z) - P_{\tau}^{\pm\mu}(-z)}{Sin((\tau\pm\mu)\pi)}$$

Lorsque τ=-1/2+i ν et μ=m, un entier , il vient un calcul déjà réalisé auparavant dans le texte, qui serait tout aussi valable avec un ordre entier positif :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) = -\frac{2}{\pi\, Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu-m\right)\pi\right)}\left(Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu-m\right)\pi\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) + Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(-z)\right)$$

$$= -\frac{2(-1)^m}{\pi\, Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)}\left((-1)^m Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) + Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(-z)\right)$$

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) = \frac{\pi(-1)^m}{2Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)}\left((-1)^m Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) - P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(-z)\right)$$

$$Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right) = i\, Sinh(\nu\pi) \quad Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right) = -Cosh(\nu\pi)$$

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) = -\frac{\pi(-1)^m}{-2Cosh(\nu\pi)}\left(i\, Sinh(\nu\pi)(-1)^m P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) - P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(-z)\right)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) = \frac{\pi(-1)^m}{2\, Cosh(\nu\pi)}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(-z) - i\,(-1)^m Sinh(\nu\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z)\right)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) = \frac{\pi}{2\, Cosh(\nu\pi)}\left((-1)^m P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(-z) - i\, Sinh(\nu\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z)\right)$$

.

D'après la formule obtenue, on a clairement isolé la partie réelle de la partie imaginaire de la fonction conique de deuxième espèce.

Il reste maintenant à envisager le cas des ordres négatifs demi-entiers :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(z)=-\frac{2}{\pi\,Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu-\frac{2m+1}{2}\right)\pi\right)}\left(Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu-\frac{2m+1}{2}\right)\pi\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(z)+Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(-z)\right)$$

$$=-\frac{2}{\pi(-1)^{m+1}Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)}\left((-1)^m Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(z)+Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(-z)\right)$$

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(z)=\frac{\pi}{2(-1)^{m+1}Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)}\left((-1)^m Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(z)-P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(-z)\right)$$

$$Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)=i\,Sinh(\nu\pi)\quad Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)=-Cosh(\nu\pi)$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(z)=\frac{2\,i}{\pi\,Sinh(\nu\pi)}\left(Cosh(\nu\pi)Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(z)+(-1)^{m+1}Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(-z)\right)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(z)=-\frac{i\,\pi}{2Sinh(\nu\pi)}\left(Cosh(\nu\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(z)+(-1)^m P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(-z)\right)$$

D'après les formules obtenues, la fonction conique de deuxième espèce est donc clairement purement imaginaire. Il en serait de même pour des ordres demi-entiers positifs.

Dans le cas encore plus général d'ordre quelconque réel, on aurait :

$$P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)=-\frac{2}{\pi\,Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu-\mu\right)\pi\right)}\left(Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu-\mu\right)\pi\right)Q^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+Q^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\right)$$

$$Q^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)=\frac{\pi}{2Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu-\mu\right)\pi\right)}\left(Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu-\mu\right)\pi\right)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)-P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\right)$$

$$\Rightarrow Q^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)=\frac{\pi\left(\left[Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)Cos(\mu\pi)+Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)Sin(\mu\pi)\right]P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)-P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\right)}{2\left[Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)Cos(\mu\pi)-Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)Sin(\mu\pi)\right]}$$

$$Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)=i\,Sinh(\nu\pi)\quad Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)=-Cosh(\nu\pi)$$

$$\Rightarrow Q^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)=-\frac{\pi}{2}\frac{\left([i\,Sinh(\nu\pi)Cos(\mu\pi)-Cosh(\nu\pi)Sin(\mu\pi)]P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)-P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\right)}{[Cosh(\nu\pi)Cos(\mu\pi)+i\,Sinh(\nu\pi)Sin(\mu\pi)]}$$

$$\Rightarrow Q^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)=\frac{\pi}{2}\frac{\left\{\begin{array}{l}[Cosh(\nu\pi)Cos(\mu\pi)-i\,Sinh(\nu\pi)Sin(\mu\pi)]\times\\ \left([Cosh(\nu\pi)Sin(\mu\pi)-i\,Sinh(\nu\pi)Cos(\mu\pi)]P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\right)\end{array}\right\}}{\left[Cosh^2(\nu\pi)Cos^2(\mu\pi)+Sinh^2(\nu\pi)Sin^2(\mu\pi)\right]}$$

$$\left[Cosh^2(\nu\pi)Cos^2(\mu\pi)+Sinh^2(\nu\pi)Sin^2(\mu\pi)\right]=Cosh^2(\nu\pi)-Sin^2(\mu\pi)$$

$$[Cosh(\nu\pi)Cos(\mu\pi)-i\,Sinh(\nu\pi)Sin(\mu\pi)]\times[Cosh(\nu\pi)Sin(\mu\pi)-i\,Sinh(\nu\pi)Cos(\mu\pi)]=$$
$$=Cos(\mu\pi)Sin(\mu\pi)-iCosh(\nu\pi)Sinh(\nu\pi)$$

$$\Rightarrow Q^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)=\frac{\pi}{2}\frac{\left(\begin{array}{l}[Cos(\mu\pi)Sin(\mu\pi)-iCosh(\nu\pi)Sinh(\nu\pi)]P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+\\ +[Cosh(\nu\pi)Cos(\mu\pi)-i\,Sinh(\nu\pi)Sin(\mu\pi)]P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\end{array}\right)}{Cosh^2(\nu\pi)-Sin^2(\mu\pi)}$$

$$Re\left(Q^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right)=\frac{\pi}{2}\frac{Cos(\mu\pi)\left(Sin(\mu\pi)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+Cosh(\nu\pi)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\right)}{Cosh^2(\nu\pi)-Sin^2(\mu\pi)}$$

$$Im\left(Q^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right)=-\frac{\pi}{2}\frac{Sinh(\nu\pi)\left(Cosh(\nu\pi)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+Sin(\mu\pi)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\right)}{Cosh^2(\nu\pi)-Sin^2(\mu\pi)}$$

La fonction associée de Legendre de première espèce, à valeur réelle et on l'appelle communément également la fonction conique associée de première espèce ou fonction associée de Mehler. On voit que le calcul de la fonction associée de Legendre de deuxième espèce donne un résultat imaginaire pour les ordres entiers et purement imaginaire pour les ordres demi-entiers. Il faut alors choisir une valeur réelle pour une fonction de deuxième espèce. Le choix souvent proposé comme fonction conique de deuxième espèce est le suivant :

$$\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2\lambda-1}{2}}(z)=\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) \quad si \quad \lambda=\frac{2m+1}{2} \qquad \hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2\lambda-1}{2}}(z)=\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(z) \quad si \quad \lambda=m$$

$$\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z)=Re\left((-1)^m Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z)\right)=\frac{\pi}{2\,Cosh(\nu\pi)}P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(-z) \quad m\in\mathbf{N}$$

$$\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(z)=Im\left((-1)^m Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(z)\right)=-\frac{\pi}{2Sinh(\nu\pi)}\left(Cosh(\nu\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(z)+(-1)^m P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-\frac{2m+1}{2}}(-z)\right) \quad m\in\mathbf{N}$$

Ce choix est également guidé par l''indépendance des deux fonctions solutions pour construire la solution générale du problème aux limites. Dans le cas d'un ordre entier, on ne peut prendre la partie imaginaire :

$$\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z)\right)=-\frac{\pi\,Sinh(\nu\pi)}{2\,Cosh(\nu\pi)}P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z)$$

car cette dernière n'est pas linéairement indépendante de la fonction conique de première espèce. Dans le cas d'un ordre demi-entier. La valeur de la fonction conique de deuxième espèce étant purement imaginaire, la question du choix devient évidente, d'autant que l'expression résultante est bien indépendante de la fonction de première espèce.

Au passage il est tout aussi évident que la partie réelle d'une fonction à valeur imaginaire, tout comme sa partie imaginaire, ou la partie imaginaire d'un fonction à valeur purement imaginaire, respecte également l'équation différentielle à partir du moment où tous les autres éléments de l'équation différentielle sont à valeur purement réelle, ce qui est le cas pour notre problème aux limites de départ.

Remarque sur d'autre choix de seconde solution

D'autres auteurs (voir NIST Hanbook of Mathematical functions – section Conical function), proprose le choix :

$$\hat{Q}^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z) = Re\left(e^{i\mu\pi}Q^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right) - \frac{\pi}{2}Sin(\mu\pi)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)$$

$$Re\left(e^{i\mu\pi}Q^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right) = \frac{\pi}{2}\frac{\begin{pmatrix}[Cos(\mu\pi)+iSin(\mu\pi)][Cos(\mu\pi)Sin(\mu\pi)-iCosh(\nu\pi)Sinh(\nu\pi)]P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+\\+[Cos(\mu\pi)+iSin(\mu\pi)][Cosh(\nu\pi)Cos(\mu\pi)-i\,Sinh(\nu\pi)Sin(\mu\pi)]P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\end{pmatrix}}{Cosh^2(\nu\pi)-Sin^2(\mu\pi)}$$

$$Re\left(e^{i\mu\pi}Q^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right) = \frac{\pi}{2}\frac{\left(Sin(\mu\pi)[Cos^2(\mu\pi)+Cosh(\nu\pi)Sinh(\nu\pi)]P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+[Cos^2(\mu\pi)e^{-\nu\pi}+Sinh(\nu\pi)]P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\right)}{Cosh^2(\nu\pi)-Sin^2(\mu\pi)}$$

$$\hat{Q}^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z) = \frac{\pi}{2}\frac{\left(Sin(\mu\pi)Sinh(\nu\pi)[Cosh(\nu\pi)-Sinh(\nu\pi)]P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+[Cos^2(\mu\pi)e^{-\nu\pi}+Sinh(\nu\pi)]P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\right)}{Cosh^2(\nu\pi)-Sin^2(\mu\pi)}$$

$$\hat{Q}^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z) = \frac{\pi}{2}\frac{\left(e^{-\nu\pi}Sin(\mu\pi)Sinh(\nu\pi)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+[Cos^2(\mu\pi)e^{-\nu\pi}+Sinh(\nu\pi)]P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\right)}{Cosh^2(\nu\pi)-Sin^2(\mu\pi)}$$

.

Appliquons ce choix aux fonctions coniques de Mehler du cône ultra-sphérique, il vient :

$$\mu = \frac{2\lambda-1}{2} \Rightarrow \hat{Q}^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z) = \frac{\pi}{2}\frac{\begin{pmatrix}e^{-\nu\pi}Sin\left(\left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)\pi\right)Sinh(\nu\pi)P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+\\+\left[Cos^2\left(\left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)\pi\right)e^{-\nu\pi}+Sinh(\nu\pi)\right]P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\end{pmatrix}}{Cosh^2(\nu\pi)-Sin^2\left(\left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)\pi\right)}$$

$$Pour\ \lambda = m \Rightarrow \hat{Q}^{\frac{1}{2}-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z) = \frac{\pi}{2}\frac{\left(P^{\frac{1}{2}-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)-e^{-\nu\pi}(-1)^m P^{\frac{1}{2}-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right)}{Sinh(\nu\pi)}$$

$$Pour\ \lambda = \frac{2m+1}{2} \Rightarrow \hat{Q}^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z) = \frac{\pi}{2}\frac{P^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)}{Cosh(\nu\pi)}$$

Ce choix conduit bien dans tous les cas de valeur du paramètre dimensionnel λ, à des fonctions de première et deuxième espèce indépendantes.

Revenons à la forme du développement en série. L'association entre fonctions radiales et angulaires est donc la suivante :

ν_l *valeurs définies par les conditions aux limites homogènes radiales*

$$\Phi_l^{r,\lambda}(r) = \frac{1}{r^\lambda}\left(A_l^r \, Cos\left(\nu_l Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + B_l^r \, Sin\left(\nu_l Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)$$

$$\Phi_l^{\theta,\lambda}(\theta) = \left(Sin(\theta)\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(A_n^\theta P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta)\right) + B_n^\theta \hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta)\right)\right)$$

On rappelle également que les fonctions associées de Legendre de première espèce et d'ordre entier sont reliées par les formules de liaisons :

$$P_\tau^{-m}(z) = (-1)^m \frac{\Gamma(\tau - m + 1)}{\Gamma(\tau + m + 1)} P_\tau^m(z) \Rightarrow \tau = -\frac{1}{2} + i\nu \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) = (-1)^m \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\nu - m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\nu + m\right)} P_\tau^m(z)$$

$$\Rightarrow Si \ \lambda = \frac{2m+1}{2} \quad (dimension \ n \ impaire) \quad P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) = (-1)^m \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\nu - m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\nu + m\right)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^m(z)$$

Toute solution du problème aux limites présente donc le développement en série suivant (inclusion de la solution de valeur propre uniquement dans le cas de conditions de Neumann homogène de part et d'autre) :

$$T(r,\theta) = \left(A_0^r + \frac{B_0^r}{r^{2\lambda}}\right)\frac{\left(A_\vartheta P_{\frac{2\lambda-1}{2}}^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(Cos(\vartheta)\right) + B_\vartheta Q_{\frac{2\lambda-1}{2}}^{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(Cos(\vartheta)\right)\right)}{Sin(\vartheta)^{\frac{2\lambda-1}{2}}} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{r^\lambda}\left(A_n^r \, Cos\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + B_n^r \, Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)\left(A_n^\theta P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta)\right) + B_n^\theta \hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta)\right)\right)$$

Exemple : soit le problème aux limites :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\, et\ \mu_0=Cos(\theta_0) \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=0 \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_0}=f_r(r)$$

On écarte rapidement la partie de valeur propre 0 identiquement nulle, et d'après l'étude des fonctions propres la solution se développe en série ainsi :

$$T(r,\theta)=\frac{1}{r^{\lambda}}\sum_{l=1}^{+\infty}A_l Sin\left(\nu_l Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta)\right) \qquad \nu_l=\frac{l\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} \qquad R_l(r)=\frac{1}{r^{\lambda}}Sin\left(\nu_l\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)$$

$$\Psi_l(r)=Sin\left(\nu_l\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) \quad \Psi_l(\tau)=Sin(\nu_l\alpha\,\tau) \quad A_l=\frac{\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\, r^{2\lambda-1}f_r(r)R_l(r)}{\left\|R_l(r)\right\|^2 P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta_0)\right)}=\frac{2\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\, r^{2\lambda-1}f_r(r)R_l(r)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta_0)\right)}$$

$$\left\|R_l(r)\right\|^2=\frac{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}{2} \quad Normalisation\, de\, l'intégrale \quad r\to e^t=\frac{r}{l_{r1}}\to\tau=\frac{t}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\Leftrightarrow r=l_{r1}e^{\alpha\tau} \quad t=\alpha\,\tau$$

$$I_l=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\, r^{2\lambda-1}f_r(r)R_l(r)=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\, r^{\lambda-1}f_r(r)\Psi_l(r)=\alpha\, l_{r1}{}^{\lambda}\int_0^1 d\tau\, e^{\alpha\lambda\tau}f_r(\tau)\Psi_l(\tau) \quad \alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)$$

$$I_l=\alpha\, l_{r1}{}^{\lambda}S_l\Rightarrow S_l=\int_0^1 d\tau\ e^{\alpha\lambda\tau}f_r(\tau)Sin(\nu_n\alpha\,\tau)\Rightarrow T(r,\theta)=2\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda}\sum_{l=1}^{+\infty}S_l Sin\left(\nu_l Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta_0)\right)}$$

Supposons que la fonction limite est constante $f_r(r)=T_s$*, il vient :*

$$f_r(\tau)=T_s\Rightarrow S_l=T_s\int_0^1 d\tau\, e^{\alpha\lambda\tau}Sin(\nu_l\alpha\,\tau) \quad \alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \quad Cos(\nu_l\alpha)=(-1)^l \quad e^{-\alpha\lambda}=\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda} \quad e^{\alpha\lambda}=\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda}$$

$$\nu_l=\frac{l\pi}{\alpha} \quad S_l=T_s\frac{\nu_l}{\alpha}\frac{1-e^{\alpha\lambda}Cos(\nu_l\alpha)}{\lambda^2+\nu_l{}^2}=T_s l\pi\frac{1-(-1)^l\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda}}{\alpha^2\lambda^2+l^2\pi^2}=\frac{T_s}{l_{r1}{}^{\lambda}}\frac{l\pi\left(l_{r1}{}^{\lambda}-(-1)^l l_{r2}{}^{\lambda}\right)}{\alpha^2\lambda^2+l^2\pi^2}$$

$$T(r,\theta)=2T_s\frac{\pi}{r^{\lambda}}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\left(l_{r1}{}^{\lambda}-(-1)^l l_{r2}{}^{\lambda}\right)l}{\alpha^2\lambda^2+l^2\pi^2}Sin\left(\nu_l Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta_0)\right)}$$

Supposons que la fonction limite soit de la forme : $f_r(r)=T_s/r^{\lambda}$*, il vient :*

$$f_r(r)=T_s\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda}\Rightarrow f_r(\tau)=T_s e^{-\lambda\alpha\tau} \quad \alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \quad \nu_l=\frac{l\pi}{\alpha}\Rightarrow Cos(\alpha\,\nu_l)=(-1)^l \quad et \quad Sin(\alpha\,\nu_l)=0$$

$$S_l=T_s\int_0^1 d\tau\, Sin(\nu_l\alpha\,\tau)=T_s\frac{1-(-1)^l}{l\,\pi}\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{4T_s}{\pi}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{Sin\left(\nu_{2l+1}Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{2l+1}}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta)\right)}{(2l+1)P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{2l+1}}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta_0)\right)}$$

.

Exemple : soit le problème aux limites :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_0=Cos(\theta_0) \quad T_r^{'}(r,\theta)\Big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T_r^{'}(r,\theta)\Big|_{r=l_{r2}}=0 \quad T(r,z)\Big|_{z=\mu_0}=f_r(r)$$

La partie radiale de la solution de valeur propre nulle A_0+B_0/r donne une constante dans ce cas. Et la partie angulaire donne également une constante, du fait du respect de la condition de finitude de la solution à angle ϑ=0. D'après l'étude des fonctions propres la solution se développe don en série ainsi :

$$Conditions\ de\ finitude\ en\ r=0\ et\ \vartheta=0$$

$$R_0(r)=A_0^r+\frac{B_0^r}{r^{2\lambda}}\Rightarrow B_0^r=0 \quad et \quad R_0(r)\propto 1 \quad \alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \quad \nu_l=\frac{l\pi}{\alpha}$$

$$\Theta_0(\theta)=\frac{\left(A_{0,\vartheta}P_{\frac{2\lambda-1}{2}}^{\frac{2\lambda-1}{2}}(Cos(\vartheta))+B_{0,\vartheta}Q_{\frac{2\lambda-1}{2}}^{\frac{2\lambda-1}{2}}(Cos(\vartheta))\right)}{Sin(\vartheta)^{\frac{2\lambda-1}{2}}} \Rightarrow \begin{cases} si\ \lambda=m\Rightarrow A_{0,\vartheta}=0 \quad et \quad \Theta_0(\theta)=B_{0,\vartheta} \\ si\ \lambda=\dfrac{2m+1}{2}\Rightarrow B_{0,\vartheta}=0 \quad et \quad \Theta_0(\theta)=A_{0,\vartheta} \end{cases}$$

$$T(r,\theta)=A_{0,\vartheta}+\frac{1}{r^\lambda}\sum_{l=1}^{+\infty}A_l\left(\nu_l Cos\left(\nu_l\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)+\lambda\, Sin\left(\nu_l\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))$$

$$R_l(r)=\frac{1}{r^\lambda}\left(\frac{\nu_l}{\lambda}Cos\left(\nu_l\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)+Sin\left(\nu_l\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right) \quad \Psi_l(\tau)=\frac{\nu_l}{\lambda}Cos(\nu_l\alpha\,\tau)+Sin(\nu_l\alpha\,\tau)$$

$$A_{0,\vartheta}=\frac{\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\ r^{2\lambda-1}f_r(r)}{\|R_0(r)\|^2}=\frac{2\lambda\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\ r^{2\lambda-1}f_r(r)}{l_{r2}^{\ 2\lambda}-l_{r1}^{\ 2\lambda}} \quad \|R_0(r)\|^2=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\ r^{2\lambda-1}=\frac{l_{r2}^{\ 2\lambda}-l_{r1}^{\ 2\lambda}}{2\lambda}$$

$$A_l=\frac{\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\, f_r(r)R_l(r)}{\|R_l(r)\|^2}=\frac{2\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\, f_r(r)R_l(r)}{\alpha\left(1+\dfrac{\nu^2}{\lambda^2}\right)}\Leftarrow\|R_l(r)\|^2=\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{\nu^2}{\lambda^2}\right)$$

$$Normalisation\ de\ l'int\acute{e}grale \quad r\to e^t=\frac{r}{l_{r1}}\to\tau=\frac{t}{\alpha}\Leftrightarrow r=l_{r1}e^{\alpha\tau} \quad t=\alpha\,\tau$$

$$I_l=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\, f_r(r)r^{2\lambda-1}R_l(r)=\alpha\, l_{r1}^{\ \lambda}\int_0^1 d\tau\, e^{\alpha\lambda\tau}f_r(\tau)\left(\frac{\nu_l}{\lambda}Cos(\nu_l\alpha\,\tau)+Sin(\nu_l\alpha\,\tau)\right)$$

$$\Rightarrow S_l=\int_0^1 d\tau\, e^{\alpha\lambda\tau}f_r(\tau)\left(\frac{\nu_l}{\lambda}Cos(\nu_l\alpha\,\tau)+Sin(\nu_l\alpha\,\tau)\right) \quad S_0=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\ r^{2\lambda-1}f_r(r)$$

$$T(r,\theta)=\frac{2\lambda S_0}{l_{r2}^{\ 2\lambda}-l_{r1}^{\ 2\lambda}}+2\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^\lambda\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{S_l}{\left(1+\dfrac{\nu^2}{\lambda^2}\right)}\left(\frac{\nu_l}{\lambda}Cos\left(\nu_l\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)+Sin\left(\nu_l\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta_0))}$$

.

Supposons que la fonction limite est constante = Ts, il vient immédiatement S_l =0 :

$$S_l = T_s \int_0^1 d\tau\, e^{\alpha\lambda\tau} \left(\frac{\nu_l}{\lambda} Cos(\nu_l \alpha\tau) + Sin(\nu_l \alpha\tau) \right) = 0 \quad S_0 = T_s \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} r^{2\lambda-1} dr = T_s \frac{l_{r2}^{2\lambda} - l_{r1}^{2\lambda}}{2\lambda}$$

$$\alpha = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \quad \nu_l = \frac{l\pi}{\alpha} \quad puisque \quad Sin(\nu_l \alpha) = 0$$

et la solution se réduit bien à la valeur triviale T(r,ϑ)= Ts. Avec une fonction limite de la forme : $f_r(r) = \frac{T_s}{r^\lambda}$ *, il vient :*

$$f_r(r) = T_s \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^\lambda \Rightarrow f_r(\tau) = T_s e^{-\lambda\alpha\tau} \quad \nu_l = \frac{l\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} \Rightarrow Cos(\alpha\nu_l) = (-1)^l \quad et \quad Sin(\alpha\nu_l) = 0$$

$$S_l = T_s \int_0^1 d\tau \left(\frac{\nu_l}{\lambda} Cos(\nu_l \alpha\tau) + Sin(\nu_l \alpha\tau) \right) = T_s \frac{1 - Cos(\alpha\nu_l)}{\alpha\nu_l} \Rightarrow S_{2l} = 0 \quad S_{2l+1} = T_s \frac{2}{(2l+1)\pi}$$

$$S_0 = T_s \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^\lambda r^{2\lambda-1} dr = T_s l_{r1}^\lambda \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} r^{\lambda-1} dr = \frac{T_s l_{r1}^\lambda}{\lambda}\left(l_{r2}^\lambda - l_{r1}^\lambda\right)$$

$$T(r,\theta) = \frac{2T_s l_{r1}^\lambda}{l_{r2}^\lambda + l_{r1}^\lambda} + 4T_s \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^\lambda \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\nu_{2l+1}}{\lambda} Cos\left(\nu_{2l+1} Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + Sin\left(\nu_{2l+1} Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) \right)}{\left(1 + \frac{\nu_{2l+1}^2}{\lambda^2}\right)(2l+1)\pi} \frac{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_{2l+1}}(Cos(\theta))}{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_{2l+1}}(Cos(\theta_0))}$$

Exemple : soit le problème aux limites :

$$\Delta T(r,\theta) = 0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z = Cos(\theta)\ et\ \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}} = 0 \quad T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}} = 0 \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_0} = f_r(r)$$

.

On écarte rapidement la partie de valeur propre 0 identiquement nulle, et d'après l'étude des fonctions propres la solution se développe en série ainsi :

$$T(r,\theta) = \frac{1}{r^\lambda} \sum_{l=1}^{+\infty} A_l Sin\left(\nu_l Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(Cos(\theta)) \qquad \nu_l \quad tq \quad \lambda\, Sin(\nu_l\alpha) = \nu_l\, Cos(\nu_l\alpha) \quad \alpha = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)$$

$$R_l(r) = \frac{1}{r^\lambda} Sin\left(\nu_l\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) \quad A_l = \frac{\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_r(r) r^{2\lambda-1} R_l(r)}{\|R_l(r)\|^2 P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(Cos(\theta_0))} = \frac{2\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_r(r) r^{2\lambda-1} R_l(r)}{\alpha\left(1 - \frac{Sin(\nu_l\alpha)Cos(\nu_l\alpha)}{\nu_l\alpha}\right) P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(Cos(\theta_0))}$$

$$\|R_l(r)\|^2 = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{Sin(\nu_l\alpha)Cos(\nu_l\alpha)}{\nu_l\alpha}\right) \quad Normalisation\ de\ l'intégrale$$

$$I_l = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_r(r) r^{2\lambda-1} R_l(r) = \alpha\, l_{r1}^\lambda \int_0^1 d\tau\, e^{\lambda\alpha\tau} f_r(\tau) \Psi_l(\tau) = \alpha\, l_{r1}^\lambda S_l \Rightarrow S_l = \int_0^1 d\tau\, e^{\lambda\alpha\tau} f_r(\tau) Sin(\nu_l\alpha\tau)$$

$$\Rightarrow T(r,\theta) = 2\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^\lambda \sum_{l=1}^{+\infty} S_l \frac{Sin\left(\nu_l Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)}{\left(1 - \frac{Sin(\nu_l\alpha)Cos(\nu_l\alpha)}{\nu_l\alpha}\right)} \frac{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(Cos(\theta))}{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(Cos(\theta_0))}$$

Supposons que la fonction limite est constante $f_r(r)=T_s$*, il vient :*

$$\alpha = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \quad f_r(\tau)=T_s \Rightarrow S_l = T_s\int_0^1 d\tau\, e^{\lambda\alpha\tau} Sin(\nu_l\alpha\,\tau) \Rightarrow S_l = T_s\,\frac{\nu_l}{\alpha\left(\lambda^2+\nu_l^{\,2}\right)}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{2T_s}{\alpha}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\nu_l}{\left(\lambda^2+\nu_l^{\,2}\right)}\frac{Sin\left(\nu_l Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)}{\left(1-\frac{Sin(\nu_l\,\alpha)Cos(\nu_l\alpha)}{\nu_l\alpha}\right)}\frac{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}\left(Cos(\theta)\right)}{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}\left(Cos(\theta_0)\right)} \qquad \nu_l \ \ tq \ \ \lambda\,Sin(\nu_l\alpha)=\nu_l\,Cos(\nu_l\alpha)$$

Supposons que la fonction limite soit de la forme : $f_r(r)=\frac{T_s}{r^{\lambda}}$ *, il vient*

$$f_r(r)=T_s\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda} \Rightarrow f_r(\tau)=T_s e^{-\lambda\alpha\tau} \qquad S_l = T_s\int_0^1 d\tau\, Sin(\nu_l\alpha\,\tau) = T_s\,\frac{1-Cos(\nu_l\alpha)}{\alpha\,\nu_l}$$

$$T(r,\theta)=2T_s\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\left(1-Cos(\nu_l\alpha)\right)Sin\left(\nu_l Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)}{\left(\alpha\,\nu_l - Sin(\nu_l\,\alpha)Cos(\nu_l\alpha)\right)}\frac{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}\left(Cos(\theta)\right)}{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}\left(Cos(\theta_0)\right)} \qquad \nu_l \ \ tq \ \ \lambda\,Sin(\nu_l\alpha)=\nu_l\,Cos(\nu_l\alpha)$$

Exemple : soit le problème aux limites sur une section conique-sphérique à n-dimensions :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\, et\ \mu_1=Cos(\theta_2)\, et\ \mu_2=Cos(\theta_1)$$
$$T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=0 \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_1}=f_1(r) \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_2}=f_2(r).$$

Qui se décompose en deux sous-problèmes :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\, et\ \mu_1=Cos(\theta_2)\, et\ \mu_2=Cos(\theta_1)$$
$$T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=0 \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_1}=0 \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_2}=f_2(r)$$

ainsi que :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\, et\ \mu_1=Cos(\theta_2)\, et\ \mu_2=Cos(\theta_1)$$
$$T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=0 \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_1}=f_1(r) \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_2}=0$$

Le premier problème se résout par les calculs suivants sur la partie angulaire :

$$Valeur\ \ propre\ radiale\ nulle \Rightarrow \Theta_0(\theta)=\frac{1}{Sin(\vartheta)^{\frac{2\lambda-1}{2}}}\left(\frac{P^{\frac{2\lambda-1}{2}}_{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(Cos(\vartheta)\right)}{P^{\frac{2\lambda-1}{2}}_{\frac{2\lambda-1}{2}}(\mu_1)}+\frac{Q^{\frac{2\lambda-1}{2}}_{\frac{2\lambda-1}{2}}\left(Cos(\vartheta)\right)}{Q^{\frac{2\lambda-1}{2}}_{\frac{2\lambda-1}{2}}(\mu_1)}\right)$$

$$Valeur\ \ propre\ radiale\ non\ nulle \Rightarrow \Phi^{\theta}_n(z)=A^{\theta}_n P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(z)+B^{\theta}_n \hat{Q}^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(z)$$

$$T(r,z)\big|_{z=\mu_1}=0 \Rightarrow \Phi^{\theta}_l(z)\propto \frac{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(z)}{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(\mu_1)}-\frac{\hat{Q}^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(z)}{\hat{Q}^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(\mu_1)} \quad \Theta_0(\theta)=\begin{cases} 1-\frac{Q^m_m\left(Cos(\vartheta)\right)}{Q^m_m(\mu_1)}\frac{Sin(\mu_1)^m}{Sin(\vartheta)^m} & si \quad \lambda=m+\frac{1}{2} \\ 1-\frac{P^{\frac{2m+1}{2}}_{\frac{2m+1}{2}}\left(Cos(\vartheta)\right)}{P^{\frac{2m+1}{2}}_{\frac{2m+1}{2}}(\mu_1)}\frac{Sin(\mu_1)^{\frac{2m+1}{2}}}{Sin(\vartheta)^{\frac{2m+1}{2}}} & si \quad \lambda=m+1 \end{cases}$$

Ainsi que sur la partie radiale permettant de donner l'expression du premier problème :

$$R_0(r) = A_0 + \frac{B_0}{r^{2\lambda}} \Rightarrow C.L.Neumann \to B_0 = 0 \quad et \quad R_0(r) \propto 1 \quad \alpha = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \quad \|R_0(r)\|^2 = \frac{{l_{r2}}^{2\lambda} - {l_{r1}}^{2\lambda}}{2\lambda}$$

$$\Theta_{0,2}(\theta) = \begin{cases} 1 - \dfrac{Q_m^m(Cos(\vartheta))}{Q_m^m(\mu_1)} \dfrac{Sin(\mu_1)^m}{Sin(\vartheta)^m} & si \quad \lambda = m + \dfrac{1}{2} \\ 1 - \dfrac{P_{\frac{2m+1}{2}}^{\frac{2m+1}{2}}(Cos(\vartheta))}{P_{\frac{2m+1}{2}}^{\frac{2m+1}{2}}(\mu_1)} \dfrac{Sin(\mu_1)^{\frac{2m+1}{2}}}{Sin(\vartheta)^{\frac{2m+1}{2}}} & si \quad \lambda = m+1 \end{cases} \quad \begin{cases} R_l(r) = \dfrac{1}{r^\lambda}\left(\dfrac{\nu_l}{\lambda} Cos\left(\nu_l Log\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)\right) + Sin\left(\nu_l Log\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right) \\ \Psi_l(\tau) = \dfrac{\nu_l}{\lambda} Cos(\nu_l \alpha \tau) + Sin(\nu_l \alpha \tau) \end{cases}$$

$$\|R_l(r)\|^2 = \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{\nu^2}{\lambda^2}\right) \quad \Phi_l^{\mu_1}(z) = \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(\mu_1)} - \frac{\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(z)}{\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(\mu_1)} \quad A_{0,\vartheta} = \frac{2\lambda \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1} f_2(r)}{\left({l_{r2}}^{2\lambda} - {l_{r1}}^{2\lambda}\right)\Theta_0(\mu_2)}$$

$$S_{0,2} = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1} f_2(r) \Rightarrow A_{0,\vartheta} = \frac{2\lambda S_{0,2}}{\left({l_{r2}}^{2\lambda} - {l_{r1}}^{2\lambda}\right)\Theta_0(\mu_2)}$$

$$T(r,\theta) = \frac{2\lambda S_{0,2}\Theta_{0,2}(\theta)}{\left({l_{r2}}^{2\lambda} - {l_{r1}}^{2\lambda}\right)\Theta_{0,2}(\mu_2)} + \frac{1}{r^\lambda}\sum_{l=1}^{+\infty} A_l \left(\frac{\nu_l}{\lambda} Cos\left(\nu_l Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + Sin\left(\nu_l Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)\Phi_l^{\mu_1}(Cos(\theta)) \quad \nu_l = \frac{l\pi}{\alpha}$$

$$A_l = \frac{\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_r(r) r^{2\lambda-1} R_l(r)}{\|R_l(r)\|^2 \Phi_l^{\mu_1}(\mu_2)} = \frac{2\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_r(r) r^{2\lambda-1} R_l(r)}{\alpha\left(1 + \frac{\nu^2}{\lambda^2}\right)\Phi_l^{\mu_1}(\mu_2)}$$

$$Normalisation\, de\, l'intégrale \quad r \to e^t = \frac{r}{l_{r1}} \to \tau = \frac{t}{\alpha} \Leftrightarrow r = l_{r1} e^{\alpha\tau}$$

$$t = \alpha\tau \Rightarrow I_l = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_r(r) r^{2\lambda-1} R_l(r) = \alpha\, {l_{r1}}^\lambda \int_0^1 d\tau\, e^{\alpha\lambda\tau} f_r(\tau)\left(\frac{\nu_l}{\lambda} Cos(\nu_l\alpha\tau) + Sin(\nu_l\alpha\tau)\right) = \alpha\, {l_{r1}}^\lambda S_{l,2}$$

$$\Rightarrow S_{l,2} = \int_0^1 d\tau\, e^{\alpha\lambda\tau} f_r(\tau)\left(\frac{\nu_l}{\lambda} Cos(\nu_l\alpha\tau) + Sin(\nu_l\alpha\tau)\right)$$

$$T(r,\theta) = \frac{2\lambda S_{0,2}}{\left({l_{r2}}^{2\lambda} - {l_{r1}}^{2\lambda}\right)}\frac{\Theta_{0,2}(\theta)}{\Theta_{0,2}(\mu_2)} +$$

$$+ 2\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^\lambda \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{S_{l,2}}{\left(1 + \frac{\nu^2}{\lambda^2}\right)}\left(\frac{\nu_l}{\lambda} Cos\left(\nu_l Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + Sin\left(\nu_l Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)\frac{\Phi_l^{\mu_1}(Cos(\theta))}{\Phi_l^{\mu_1}(\mu_2)} \qquad avec \quad \nu_l = \frac{l\pi}{\alpha}$$

L'expression du deuxième problème donne :

$$\begin{cases} R_l(r) = \dfrac{1}{r^{\lambda}}\left(\dfrac{\nu_l}{\lambda}Cos\left(\nu_l\, Log\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)\right) + Sin\left(\nu_l\, Log\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right) \\ \Psi_l(\tau) = \dfrac{\nu_l}{\lambda}Cos(\nu_l \alpha\, \tau\,) + Sin(\nu_l \alpha\, \tau\,) \end{cases} \qquad \Phi_l^{\mu_2}(z) = \frac{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(z)}{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(\mu_2)} - \frac{\hat{Q}^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(z)}{\hat{Q}^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\nu_l}(\mu_2)}$$

$$\Theta_{0,1}(\theta) = \begin{cases} 1 - \dfrac{Q_m^m(Cos(\vartheta))}{Q_m^m(\mu_2)}\dfrac{Sin(\mu_2)^m}{Sin(\vartheta)^m} \quad si \quad \lambda = m + \dfrac{1}{2} \\ 1 - \dfrac{P^{\frac{2m+1}{2}}_{\frac{2m+1}{2}}(Cos(\vartheta))}{P^{\frac{2m+1}{2}}_{\frac{2m+1}{2}}(\mu_2)}\dfrac{Sin(\mu_2)^m}{Sin(\vartheta)^m} \quad si \quad \lambda = m+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{l,1} = \int_0^1 d\tau\, e^{\alpha\lambda\tau} f_1(\tau)\left(\frac{\nu_l}{\lambda}Cos(\nu_l\alpha\,\tau\,) + Sin(\nu_l\alpha\,\tau\,)\right) \quad S_{0,1} = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, r^{2\lambda-1} f_1(r)$$

$$T(r,\theta) = \frac{2\lambda S_{0,1}}{\left(l_{r2}^{\ 2\lambda} - l_{r1}^{\ 2\lambda}\right)}\frac{\Theta_{0,1}(\theta)}{\Theta_{0,1}(\mu_1)} +$$

$$+2\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{S_{l,2}}{\left(1+\dfrac{\nu^2}{\lambda^2}\right)}\left(\frac{\nu_l}{\lambda}Cos\left(\nu_l\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + Sin\left(\nu_l\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)\frac{\Phi_l^{\mu_2}(Cos(\theta))}{\Phi_l^{\mu_2}(\mu_1)} \qquad avec \quad \nu_l = \frac{l\pi}{\alpha}$$

.

Lorsque les deux fonctions limites sur les tranches de la section conique-sphérique creuse sont constantes, alors on a la nullité de tous les termes de valeur propres non nulle puisque :

$$f_1(\tau) = T_1 \quad f_2(\tau) = T_2$$

$$S_{l,1} = T_1\int_0^1 d\tau\, e^{\alpha\lambda\tau}\left(\frac{\nu_l}{\lambda}Cos(\nu_l\alpha\,\tau\,) + Sin(\nu_l\alpha\,\tau\,)\right) \quad S_{l,2} = T_2\int_0^1 d\tau\, e^{\alpha\lambda\tau}\left(\frac{\nu_l}{\lambda}Cos(\nu_l\alpha\,\tau\,) + Sin(\nu_l\alpha\,\tau\,)\right)$$

$$Or \quad \int_0^1 d\tau\, e^{\alpha\lambda\tau}\left(\frac{\nu_l}{\lambda}Cos(\nu_l\alpha\,\tau\,) + Sin(\nu_l\alpha\,\tau\,)\right) = \frac{e^{\alpha\lambda}}{\alpha\lambda}Sin(\nu_l\alpha) = 0$$

.

Dans ce cas la solution devient triviale est s'écrit :

$$\Theta_{0,1}(\theta) = \begin{cases} 1 - \dfrac{Q_m^m(Cos(\vartheta))}{Q_m^m(\mu_2)}\dfrac{Sin(\mu_2)^m}{Sin(\vartheta)^m} \quad si \quad \lambda = m + \dfrac{1}{2} \\ 1 - \dfrac{P^{\frac{2m+1}{2}}_{\frac{2m+1}{2}}(Cos(\vartheta))}{P^{\frac{2m+1}{2}}_{\frac{2m+1}{2}}(\mu_2)}\dfrac{Sin(\mu_2)^{\frac{2m+1}{2}}}{Sin(\vartheta)^{\frac{2m+1}{2}}} \quad si \quad \lambda = m+1 \end{cases} \qquad \Theta_{0,2}(\theta) = \begin{cases} 1 - \dfrac{Q_m^m(Cos(\vartheta))}{Q_m^m(\mu_1)}\dfrac{Sin(\mu_1)^m}{Sin(\vartheta)^m} \quad si \quad \lambda = m + \dfrac{1}{2} \\ 1 - \dfrac{P^{\frac{2m+1}{2}}_{\frac{2m+1}{2}}(Cos(\vartheta))}{P^{\frac{2m+1}{2}}_{\frac{2m+1}{2}}(\mu_1)}\dfrac{Sin(\mu_1)^{\frac{2m+1}{2}}}{Sin(\vartheta)^{\frac{2m+1}{2}}} \quad si \quad \lambda = m \end{cases}$$

$$T(r,\theta) = T_1\frac{\Theta_{0,1}(\theta)}{\Theta_{0,1}(\mu_1)} + T_2\frac{\Theta_{0,2}(\theta)}{\Theta_{0,2}(\mu_2)}$$

L'obtention de cette solution triviale qui ne dépend plus de r n'est pas un hasard, puisque les conditions aux limites inhomogènes choisies sont constantes et les conditions homogènes de Neumann implique aucun gradient dans la direction radiale. Tout cela ne peut que conduire à une solution ne dépendant plus de r. Une telle configuration est totalement équivalente à la formulation d'une équation de Laplace dans l'unique coordonnées angulaire ϑ sur un système ultra-sphérique à n-dimensions.

Illustrons cette solution dîtes triviale selon quelques valeurs du paramètre dimensionnel λ.

$$\Theta_{0,1}(\theta)=\begin{cases}1-\dfrac{Q_m^m(Cos(\vartheta))}{Q_m^m(\mu_2)}\dfrac{Sin(\mu_2)^m}{Sin(\vartheta)^m} & si \quad \lambda=m+\dfrac{1}{2}\\ 1-\dfrac{P_{\frac{2m+1}{2}}^{\frac{2m+1}{2}}(Cos(\vartheta))}{P_{\frac{2m+1}{2}}^{\frac{2m+1}{2}}(\mu_2)}\dfrac{Sin(\mu_2)^{\frac{2m+1}{2}}}{Sin(\vartheta)^{\frac{2m+1}{2}}} & si \quad \lambda=m+1\end{cases}\qquad \Theta_{0,2}(\theta)=\begin{cases}1-\dfrac{Q_m^m(Cos(\vartheta))}{Q_m^m(\mu_1)}\dfrac{Sin(\mu_1)^m}{Sin(\vartheta)^m}\\ si \quad \lambda=m+\dfrac{1}{2}\\ 1-\dfrac{P_{\frac{2m+1}{2}}^{\frac{2m+1}{2}}(Cos(\vartheta))}{P_{\frac{2m+1}{2}}^{\frac{2m+1}{2}}(\mu_1)}\dfrac{Sin(\mu_1)^{\frac{2m+1}{2}}}{Sin(\vartheta)^{\frac{2m+1}{2}}}\\ si \quad \lambda=m+1\end{cases}$$

$$\lambda=\frac{1}{2}\rightarrow Q_0^0(Cos(\vartheta))=\frac{1}{2}Log\left(\frac{1+Cos(\theta)}{1-Cos(\theta)}\right)\Rightarrow \Theta_{0,1}(\theta)=1-\frac{Q_0^0(Cos(\vartheta))}{Q_0^0(\mu_2)}=\frac{Log\left(\dfrac{1+\mu_2}{1-\mu_2}\dfrac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\dfrac{1+\mu_2}{1-\mu_2}\right)}$$

$$\frac{\Theta_{0,1}(\theta)}{\Theta_{0,1}(\mu_1)}=\frac{Log\left(\dfrac{1+\mu_2}{1-\mu_2}\dfrac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\dfrac{1+\mu_2}{1-\mu_2}\dfrac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)}\qquad \Theta_{0,2}(\theta)=1-\frac{Q_0^0(Cos(\vartheta))}{Q_0^0(\mu_1)}=\frac{Log\left(\dfrac{1+\mu_1}{1-\mu_1}\dfrac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\dfrac{1+\mu_1}{1-\mu_1}\right)}$$

$$\frac{\Theta_{0,2}(\theta)}{\Theta_{0,2}(\mu_2)}=\frac{Log\left(\dfrac{1+\mu_1}{1-\mu_1}\dfrac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\dfrac{1+\mu_1}{1-\mu_1}\dfrac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}$$

$$\lambda=1\rightarrow \frac{P_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(Cos(\vartheta))}{\sqrt{Sin(\theta)}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}CoTan(\theta)\Rightarrow 1-\frac{P_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(Cos(\vartheta))}{P_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mu_2)}\frac{Sin(\mu_2)^{\frac{1}{2}}}{Sin(\vartheta)^{\frac{1}{2}}}=1-\frac{CoTan(\theta)}{CoTan(\mu_2)}$$

$$\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow T(r,\theta)=T_1\frac{\Theta_{0,1}(\theta)}{\Theta_{0,1}(\mu_1)}+T_2\frac{\Theta_{0,2}(\theta)}{\Theta_{0,2}(\mu_2)}=T_1\frac{Log\left(\dfrac{1+\mu_2}{1-\mu_2}\dfrac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\dfrac{1+\mu_2}{1-\mu_2}\dfrac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)}+T_2\frac{Log\left(\dfrac{1+\mu_1}{1-\mu_1}\dfrac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\dfrac{1+\mu_1}{1-\mu_1}\dfrac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}$$

$$\lambda=1\Rightarrow T(r,\theta)=T_1\frac{\left(1-\dfrac{CoTan(\theta)}{CoTan(\mu_2)}\right)}{\left(1-\dfrac{CoTan(\mu_1)}{CoTan(\mu_2)}\right)}+T_2\frac{\left(1-\dfrac{CoTan(\theta)}{CoTan(\mu_1)}\right)}{\left(1-\dfrac{CoTan(\mu_2)}{CoTan(\mu_1)}\right)}=$$

$$=T_1\frac{(CoTan(\mu_2)-CoTan(\theta))}{(CoTan(\mu_2)-CoTan(\mu_1))}+T_2\frac{(CoTan(\mu_1)-CoTan(\theta))}{(CoTan(\mu_1)-CoTan(\mu_2))}$$

.

Représentation intégrale de la solution du problème de Dirichlet inhomogène sur la surface d'un cône-ultrasphérique.

Bien que les fonctions radiales d'une section conique-sphérique ne soient pas apte à représenter une solution sous la forme de série sur un cône plein, du fait de sa rapide oscillation autour de l'origine. N Lebedev dans son ouvrage « SPECIAL FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS, Prentice Hall 1965 » les utilisent pour exprimer sous forme intégrale la solution du problème de Dirichlet suivant :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad z=Cos(\theta)\, et\ \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$\Omega=\{(r,\theta)\in[0,+\infty]\times[0,\theta_0]\}$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f_r(r)$$

Condition

$$Lim_{r\to+\infty}T(r,\theta)=0$$

$$Lim_{r\to+\infty}f_r(r)=0$$

Cette approche peut tout à fait se généraliser pour un cône dans un espace ultra-sphérique à n dimensions. Comme nous l'avons vu les fonctions suivantes sont solutions de l'équation de Laplace (attention on utilise les ordres négatifs des fonctions coniques de Mehler):

$$\Phi_\tau^r(r)=\frac{1}{r^\lambda}\left(A_\tau^r\, Cos(\tau\ Log(r))+B_\tau^r\, Sin(\tau\ Log(r))\right)$$

$$\Phi_\tau^\theta(\theta)=\left(Sin(\theta)\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(A_\tau^\theta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))+B_\tau^\theta \hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))\right)$$

La condition de finitude en ϑ=0, implique d'écarter la fonction de deuxième espèce qui diverge pour ϑ=0 (voir plus loin le comportement des solutions à la singularité ϑ=0). La solution se présente donc sous la forme :

$$T(r,\theta)=\frac{1}{r^\lambda}\left(A_\tau^r\, Cos(\tau\ Log(r))+B_\tau^r\, Sin(\tau\ Log(r))\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}$$

Supposons maintenant, comme le fait N.Lebedev, que la fonction limite sur la surface du cône admette un développement en intégrale de Fourier généralisée, soit :

$$Posons\ \xi=Log(r)\Rightarrow d\xi=\frac{dr}{r} \qquad r^\lambda f_r(r)=\int_0^{+\infty}d\tau\,\left(F_c(\tau)Cos(\tau\xi)+F_s(\tau)Sin(\tau\xi)\right)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} F_c(\tau)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ r^\lambda f_r(r)Cos(\tau\xi)=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dr\,\left(f_r(r)r^{\lambda-1}Cos(\tau\, Log(r))\right) \\ F_s(\tau)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ r^\lambda f_r(r)Sin(\tau\xi)=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dr\,\left(f_r(r)r^{\lambda-1}Sin(\tau\, Log(r))\right) \end{cases}$$

.

Le respect de la condition aux limites de Dirichlet conduit à la solution suivante :

$$T(r,\theta)=\frac{1}{r^{\lambda}}\left(A_{\tau}^{r}\,Cos(\tau\ Log(r))+B_{\tau}^{r}\,Sin(\tau\ Log(r))\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}$$

Développement intégrale sur le paramètre τ

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{1}{r^{\lambda}}\int_{0}^{+\infty}d\tau\left(A_{\tau}^{r}\,Cos(\tau\ Log(r))+B_{\tau}^{r}\,Sin(\tau\ Log(r))\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}$$

Comme $T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f_r(r)$

$$\frac{1}{r^{\lambda}}\int_{0}^{+\infty}d\tau\left(A_{\tau}^{r}\,Cos(\tau\ Log(r))+B_{\tau}^{r}\,Sin(\tau\ Log(r))\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta_0))=\frac{1}{r^{\lambda}}\int_{0}^{+\infty}d\tau\left(F_c(\tau)Cos(\tau\xi)+F_s(\tau)Sin(\tau\xi)\right)$$

$$A_{\tau}^{r}=\frac{F_c(\tau)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta_0))(Sin(\theta_0))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}\qquad B_{\tau}^{r}=\frac{F_s(\tau)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta_0))(Sin(\theta_0))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}$$

$$T(r,\theta)=\frac{1}{r^{\lambda}}\int_{0}^{+\infty}d\tau\left(F_c(\tau)Cos(\tau\ Log(r))+F_s(\tau)Sin(\tau\ Log(r))\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta_0))}\frac{(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{(Sin(\theta_0))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}$$

avec

$$F_c(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}dr\left(f_r(r)r^{\lambda-1}Cos(\tau\,Log(r))\right)\quad et\quad F_s(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}dr\left(f_r(r)r^{\lambda-1}Sin(\tau\,Log(r))\right)$$

Dans la littérature, il y a une condition pour que le développement de Fourier existe sur la fonction limite f(r) (voir E. C. Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, second edition, Oxford University Press, London (1950), Théoreme 3, p. 13):

$$f_r(r)\ continue\quad et\quad f_r(r)\ bornée\ sur\ tout\ interval\ [r1,r2]\quad et\quad \int_{0}^{+\infty}dr\left|f_r(r)\right|r^{\lambda-1}\quad est\ \ finie$$

.

Comportement des solutions à la singularité ϑ=0

Les solutions angulaires comporte une forme indéterminée sur l'axe x1.

$$\Phi_{1\tau}^{\theta}(\theta)=\left(Sin(\theta)\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta)\right)\quad \Phi_{2\tau}^{\theta}(\theta)=\left(Sin(\theta)\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}B_{\tau}^{\theta}\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta)\right).$$

Examinons la solution de première espèce pour une valeur de ϑ proche de zéro, en utilisant une formule de développement autour de la singularité z->1⁻ :

$$P_{\nu}^{\mu}(x)\approx\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{2}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} & \mu\neq 1,2,3,\cdots\\ \dfrac{(-1)^{\mu}(\nu-\mu+1)_{2\mu}}{\mu!}\left(\dfrac{1-x}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}}=\dfrac{(-1)^{\mu}\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(\dfrac{1-x}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}} & \mu=1,2,3,\cdots,\nu\neq\mu-1,\mu-2,\cdots,-\mu\end{cases}$$

$$P_{\nu}^{-m}(x)=(-1)^{m}\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_{\nu}^{m}(x)\Rightarrow P_{\nu}^{-m}(x)\approx\frac{1}{\Gamma(1+m)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{m}{2}}$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(x)\approx\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{2m+3}{2}\right)}\left(\dfrac{1-x}{2}\right)^{\frac{2m+1}{4}} & \lambda=m+1\\ \dfrac{1}{\Gamma(1+m)}\left(\dfrac{1-x}{2}\right)^{\frac{m}{2}} & \lambda=m+\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Calculons la valeur limite du produit lorsque l'angle tend vers 0 :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta)\right)\left(Sin(\theta)\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}=P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(x)\left(1-x^{2}\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(x)\left(1-x^{2}\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\approx\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{2m+3}{2}\right)2^{\frac{2m+1}{4}}}\dfrac{\left(1-x^{2}\right)^{\frac{2m+1}{4}}\left(1-x^{2}\right)^{-\frac{2m+1}{4}}}{(1+x)^{\frac{2m+1}{4}}} & \lambda=m+1\\ \dfrac{1}{\Gamma(1+m)2^{\frac{m}{2}}}\dfrac{\left(1-x^{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1-x^{2}\right)^{-\frac{m}{2}}}{(1+x)^{\frac{m}{2}}} & \lambda=m+\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(x)\left(1-x^{2}\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\approx\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{2m+3}{2}\right)2^{\frac{2m+1}{4}}(1+x)^{\frac{2m+1}{4}}} & \lambda=m+1\\ \dfrac{1}{\Gamma(1+m)2^{\frac{m}{2}}(1+x)^{\frac{m}{2}}} & \lambda=m+\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{x\to 1^{-}}{Lim}\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(x)\left(1-x^{2}\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}=\underset{\theta\to 0^{+}}{Lim}\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta)\right)\left(Sin(\theta)\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{2m+3}{2}\right)2^{\frac{2m+1}{2}}} & \lambda=m+1\\ \dfrac{1}{\Gamma(1+m)2^{m}}=\dfrac{1}{2^{m}m!} & \lambda=m+\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Le comportement de la seconde solution lorsque l'angle s'annule dépend de celui de la fonction associée de Legendre de deuxième espèce dont elle est issue :

$$Q_\nu^{-\mu}(x) \approx \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left(\frac{2}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \quad \nu \pm \mu \neq -1,-2,-3 \Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(x) \approx \frac{\Gamma\left(\frac{2\lambda-1}{4}\right)\Gamma(1-\lambda+i\tau)}{\Gamma(\lambda+i\tau)}\left(\frac{2}{1-x}\right)^{\frac{2\lambda-1}{4}}$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(x) \approx \frac{\pi\,\Gamma\left(\frac{2\lambda-1}{4}\right)}{\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Sin(\pi(\lambda-i\tau))}\left(\frac{2}{1-x}\right)^{\frac{2\lambda-1}{4}} \quad x = Cos(\theta) \quad 1-x^2 = Sin^2(\theta)$$

$$(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}} Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta)) \approx \frac{\pi\,\Gamma\left(\frac{2\lambda-1}{4}\right)2^{\frac{2\lambda-1}{4}}}{\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Sin(\pi(\lambda-i\tau))}(1-x)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\left(1-x^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}$$

$$\Rightarrow (Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}} Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta)) \approx \frac{\pi\,\Gamma\left(\frac{2\lambda-1}{4}\right)2^{\frac{2\lambda-1}{4}}}{\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Sin(\pi(\lambda-i\tau))}(1-x)^{\frac{1-2\lambda}{2}}(1+x)^{\frac{1-2\lambda}{4}}$$

$$\Rightarrow \underset{\theta\to 0^+}{Lim}(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}} Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta)) = \underset{x\to 1^-}{Lim}\frac{\pi\,\Gamma\left(\frac{2\lambda-1}{4}\right)2^{\frac{2\lambda-1}{4}}}{\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Sin(\pi(\lambda-i\tau))}(1-x)^{\frac{1-2\lambda}{2}}(1+x)^{\frac{1-2\lambda}{4}} = \infty$$

$$comme \quad \lambda \geq \frac{1}{2}$$

ce qui confirme la non finitude de la seconde solution à angle nul.

Revenons à l'exemple inspirée de Lebedev qui est un problème d'électrostatique à n-dimensions : on doit trouver le potentiel électrostatique à l'intérieur d'un cône conducteur gardé au potentiel 0, si l'on place à une distance a de son sommet une charge q. La solution se développe comme suit par décomposition du potentiel en deux fonctions. Nous verrons par la suite que le problème à résoudre est en fait une équation de Poisson (celle dont le terme source représente la charge placée dans l'axe du cône), dont on connaît une solution particulière (le potentiel d'une charge libre dans tout l'espace) qui certes ne répond pas aux conditions aux limites imposées, mais qui ajoutée à la solution de l'équation de Laplace aux conditions aux limites de valeurs opposées sur la surface conique donne bien la solution du problème aux limites de Poisson. Pour cela il vient donc le problème aux limites de Laplace suivant :

$$T(r,\theta)=\frac{q}{\left(r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta)\right)^{\lambda}}+U(r,\theta)\quad T(r,\theta)\Big|_{\theta=\theta_0}=0\Rightarrow U(r,\theta)\Big|_{\theta=\theta_0}=-\frac{q}{\left(r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}$$

$$U(r,\theta)\Big|=\frac{1}{r^{\lambda}}\int_0^{+\infty}d\tau\left(F_c(\tau)Cos(\tau\ Log(r))+F_s(\tau)Sin(\tau\ Log(r))\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(Cos(\theta_0)\right)}\frac{\left(Sin(\theta)\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{\left(Sin(\theta_0)\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}}$$

$$avec\quad F_c(\tau)=-\frac{q}{\pi}\int_0^{+\infty}dr\left(\frac{r^{\lambda-1}Cos(\tau\,Log(r))}{\left(r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}\right)=-\frac{q}{\pi\,a^{\lambda}}\int_0^{+\infty}\frac{dr}{r}\left(\frac{r^{\lambda}Cos(\tau\,Log(r))}{r^{\lambda}\left(\frac{r}{a}+\frac{a}{r}-2Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}\right)$$

$$\xi=Log(r)\Rightarrow\xi-Log(a)=Log\left(\frac{r}{a}\right)\Rightarrow\frac{r}{a}=e^{\xi-Log(a)}\quad et\quad\frac{a}{r}=e^{-\xi+Log(a)}$$

$$\frac{r}{a}+\frac{a}{r}=e^{\xi-Log(a)}+e^{-\xi+Log(a)}=2\,Cosh(\xi-Log(a))\Rightarrow F_c(\tau)=-\frac{q}{\pi\,a^{\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\,\frac{Cos(\tau\,\xi)}{\left(2\,Cosh(\xi-Log(a))-2Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}$$

$$s=\xi-Log(a)\Rightarrow F_c(\tau)=-\frac{q}{\pi\,a^{\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,(s+Log(a)))}{\left(2\,Cosh(s)-2Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}$$

$$F_c(\tau)=-\frac{q}{\pi\,a^{\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,s)Cos(\tau\,Log(a))-Sin(\tau\,s)Sin(\tau\,Log(a))}{\left(2\,Cosh(s)-2Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}$$

$$Or\quad\int_{-\infty}^{+\infty}ds\,\frac{Sin(\tau\,s)}{\left(2\,Cosh(s)-2Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}=0\Leftarrow Sin(\tau\,s)\quad impair\quad et\quad\int_{-\infty}^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,s)}{\left(2\,Cosh(s)-2Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}=2\int_0^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,s)}{\left(2\,Cosh(s)-2Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}$$

$$\Rightarrow F_c(\tau)=-\frac{2qCos(\tau\,Log(a))}{\pi 2^{\lambda}a^{\lambda}}\int_0^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,s)}{\left(Cosh(s)-Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}=-\frac{2^{1-\lambda}\,qCos(\tau\,Log(a))}{\pi a^{\lambda}}\int_0^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,s)}{\left(Cosh(s)-Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}$$

$$\int_0^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,s)}{\left(Cosh(s)-Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)}{\Gamma(\lambda)\left(Sin(\theta_0)\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(-Cos(\theta_0)\right)$$

$$\Rightarrow F_c(\tau)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{qCos(\tau\,Log(a))}{2^{\lambda}a^{\lambda}}\frac{\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)}{\Gamma(\lambda)\left(Sin(\theta_0)\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(-Cos(\theta_0)\right)$$

De même :

$$F_s(\tau)=-\frac{q}{\pi}\int_0^{+\infty}dr\left(\frac{r^{\lambda-1}Sin(\tau\,Log(r))}{\left(r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}\right)\Rightarrow F_s(\tau)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{qSin(\tau\,Log(a))}{2^{\lambda}a^{\lambda}}\,\frac{\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)}{\Gamma(\lambda)(Sin(\theta_0))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))$$

La solution du problème est alors donnée par l'intégrale :

$$U(r,\theta)=-\frac{1}{r^{\lambda}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{q(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{2^{\lambda}a^{\lambda}\Gamma(\lambda)(Sin(\theta_0))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))\times\\ \times\left(\begin{array}{l}Cos(\tau\,Log(a))Cos(\tau\,Log(r))+\\+Sin(\tau\,Log(a))Sin(\tau\,Log(r))\end{array}\right)\end{array}\right]\frac{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$U(r,\theta)=-\frac{1}{r^{\lambda}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{q(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{2^{\lambda}a^{\lambda}\Gamma(\lambda)(Sin(\theta_0))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{a}\right)\right)\times\\ \times\dfrac{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}\end{array}\right]$$

$$T(r,\theta)=\frac{q}{a^{\lambda}r^{\lambda}}\left(\begin{array}{l}\dfrac{1}{\left(\frac{r}{a}+\frac{a}{r}-2\,Cos(\theta)\right)^{\lambda}}-\\ -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda)(Sin(\theta_0))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{a}\right)\right)\times\\ \times\dfrac{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}\end{array}\right]\end{array}\right)$$

Intégrale majorée par $\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\Gamma(\lambda)(Sin(\theta_0))^{\lambda-\frac{1}{2}}}{\left(2Sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)^{\lambda}}$ *voir plus bas*

$$1\le P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))\quad 0\le\theta\le\pi\quad P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))\le P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))\quad 0\le\theta\le\theta_0$$

$$\frac{1}{(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}\le\frac{1}{(Sin(\theta_0))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}\le 1\quad et\quad Sin(\theta)\le Sin(\theta_0)\quad 0\le\theta\le\theta_0\le\frac{\pi}{2}$$

$$soit\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda)(Sin(\theta_0))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{a}\right)\right)\times\\ \times\dfrac{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}\end{array}\right]\le$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}d\tau\left[\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))\right]\le\frac{\left(Sin(\theta_0)/Sin(\theta)\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}}{\left(4Sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)^{\lambda}}$$

Dans le calcul précédent et par la suite on utilise les deux représentations intégrales des fonctions associées de Legendre de première espèce :

$$P_\nu^{-\mu}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-1\right)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int_0^{+\infty}dt\frac{Cosh\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\right)}{(x+Cosh(t))^{\mu+\frac{1}{2}}}\quad \mu+\nu\neq-1,-2,\cdots \operatorname{Re}(\mu-\nu)>0 \quad x>1$$

$$P_\nu^{-\mu}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(1-x^2\right)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int_0^{+\infty}dt\frac{Cosh\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\right)}{(x+Cosh(t))^{\mu+\frac{1}{2}}}\quad \mu+\nu\neq-1,-2,\cdots \operatorname{Re}(\mu-\nu)>0 \quad x\in[-1,1]$$

$$\text{Pr}\,enons\ x>1\ il\ vient\ \nu=-\frac{1}{2}+i\tau\quad \mu=\frac{2\lambda-1}{2}\Rightarrow\mu-\nu=\frac{2\lambda-1}{2}+\frac{1}{2}-i\tau=\lambda-i\tau\Rightarrow\operatorname{Re}(\mu-\nu)>0$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(\lambda)\left(x^2-1\right)^{\frac{2\lambda-1}{4}}}{\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)}\int_0^{+\infty}dt\frac{Cosh(i\tau t)}{(x+Cosh(t))^{\lambda}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(\lambda)\left(x^2-1\right)^{\frac{2\lambda-1}{4}}}{\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)}\int_0^{+\infty}dt\frac{Cos(\tau t)}{(x+Cosh(t))^{\lambda}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(\lambda)\left(x^2-1\right)^{\frac{2\lambda-1}{4}}}{\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)}\int_0^{+\infty}dt\frac{Cos(\tau t)}{(x+Cosh(t))^{\lambda}} & x>1\\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(\lambda)\left(1-x^2\right)^{\frac{2\lambda-1}{4}}}{\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)}\int_0^{+\infty}dt\frac{Cos(\tau t)}{(x+Cosh(t))^{\lambda}} & x\in[-1,1]\end{cases}.$$

Les formules suivantes sont valables pour tous les ordres entiers et demi-entiers négatifs en appliquant une transformée de Fourier et son inverse, d'abord pour les valeurs dans l'intervalle] 1,+∞).

$$\frac{1}{(Cosh(\alpha)+Cosh(x))^{\lambda}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\tau\ Cos(\tau\,x)\int_0^{+\infty}d\theta\frac{Cos(\tau\,\theta)}{(Cosh(\alpha)+Cosh(\theta))^{\lambda}}$$

$$Or\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cosh(\alpha))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(\lambda)(Sinh(\alpha))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}{\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)}\int_0^{+\infty}d\theta\frac{Cos(\tau\,\theta)}{(Cosh(\alpha)+Cosh(\theta))^{\lambda}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(Cosh(\alpha)+Cosh(x))^{\lambda}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cos(\tau\,x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cosh(\alpha))}{\Gamma(\lambda)(Sinh(\alpha))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}$$

$$x=i(\pi-\beta)\Rightarrow\frac{1}{(Cosh(\alpha)-Cos(\beta))^{\lambda}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cosh(\tau(\pi-\beta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cosh(\alpha))}{\Gamma(\lambda)(Sinh(\alpha))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}$$

$$x=i\beta\Rightarrow\frac{1}{(Cosh(\alpha)+Cos(\beta))^{\lambda}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cosh(\tau\beta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cosh(\alpha))}{\Gamma(\lambda)(Sinh(\alpha))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}.$$

Puis pour des valeurs dans l'intervalle (-1,+1] :

$$\frac{1}{(Cos(\alpha)+Cosh(x))^{\lambda}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\tau\ Cos(\tau\,x)\int_0^{+\infty}d\theta\,\frac{Cos(\tau\,\theta)}{(Cos(\alpha)+Cosh(\theta))^{\lambda}}$$

$$Or\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\alpha))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(\lambda)(Sin(\alpha))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}{\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)}\int_0^{+\infty}dt\,\frac{Cos(\tau\,t)}{(Cos(\alpha)+Cosh(t))^{\lambda}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(Cos(\alpha)+Cosh(x))^{\lambda}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cos(\tau\,x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\alpha))}{\Gamma(\lambda)(Sin(\alpha))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}$$

$$x=i(\pi-\beta)\Rightarrow\frac{1}{(Cos(\alpha)-Cos(\beta))^{\lambda}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cosh(\tau(\pi-\beta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\alpha))}{\Gamma(\lambda)(Sin(\alpha))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}$$

$$x=i\beta\Rightarrow\frac{1}{(Cos(\alpha)+Cos(\beta))^{\lambda}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cosh(\tau\beta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\alpha))}{\Gamma(\lambda)(Sin(\alpha))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}$$

.

En posant soit x=0, soit β=π, il vient :

$$\frac{1}{(Cos(\alpha)+1)^{\lambda}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m}(Cos(\alpha))}{\Gamma(\lambda)(Sin(\alpha))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}\qquad Comme\,Cos(\alpha)+1=2Cos^{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\left(2Cos^{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{\lambda}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m}(Cos(\alpha))}{\Gamma(\lambda)(Sin(\alpha))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m}(Cos(\alpha))=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma(\lambda)(Sin(\alpha))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}{\left(2Cos^{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{\lambda}}$$

$$\alpha=(\pi-\theta_0)\Rightarrow\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m}(-Cos(\theta_0))=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma(\lambda)(Sin(\theta_0))^{\lambda-\frac{1}{2}}}{\left(2Sin^{2}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)^{\lambda}}$$

$$\alpha=i\theta_0\Rightarrow\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m}(Cos(\theta_0))=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma(\lambda)(Sin(\theta_0))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}{\left(2Cos^{2}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)^{\lambda}}$$

Remarque : l'intégrale majorante se déduit des formules précédentes

Donnons quelques valeurs du produit des fonctions Gamma d'Euler :

$$\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)=\begin{cases}Si\ m>0\quad\prod_{l=0}^{m-1}\left(\left(\frac{2l+1}{2}\right)^{2}+\tau^{2}\right)\frac{\pi}{Cosh(\pi\,\tau)}\quad m=0\to\frac{\pi}{Cosh(\pi\,\tau)}\quad pour\quad\lambda=\frac{2m+1}{2}\\ Si\ m>0\quad\prod_{l=0}^{m-1}\left(l^{2}+\tau^{2}\right)\frac{\pi}{\tau\,Sinh(\pi\,\tau)}\quad m=0\to\frac{\pi}{\tau\,Sinh(\pi\,\tau)}\quad pour\quad\lambda=m\end{cases}$$

.

***Remarque sur le respect de la condition sur les fonctions limites** : on a vu qu'il peut exister un développement intégral de la solution du problème aux limites si la condition suivante, est respectée :*

$$f_r(r) \; continue \quad et \quad f_r(r) \; bornée \; sur \; tout \; interval \; [r1, r2]$$

$$et \quad \int_0^{+\infty} dr |f_r(r)| r^{\lambda-1} \quad est \; finie \quad f_r(r) = -\frac{q}{\left(r^2 + a^2 - 2a\,r\,Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}} \Rightarrow f_r(r) = \frac{1}{\left(r^2 + a^2 - 2a\,r\,Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}}$$

Nous aurions pu par exemple vérifier que ces propriétés étaient bien respectées dans le problème électrostatique ou de source de chaleur ponctuelle. La fonction limite de la forme suivante respecte par évidence bien les deux premières conditions, il reste à démontrer la finitude de l'intégrale. Et le problème réside essentiellement sur les limites respectives de l'intégration. Il suffit de prouver la finitude de l'intégration d'un coté sur une borne suffisamment grande et de l'autre une borne suffisamment petite pour trouver des encadrements finis.

$$\int_0^{+\infty} dr \frac{|f_r(r)|}{r^{\lambda}} \Rightarrow \int_b^{+\infty} dr |f_r(r)| r^{\lambda-1} \quad et \int_0^{c} dr |f_r(r)| r^{\lambda-1} \quad c \; suffisamment \; petit \rightarrow c < a \; et \; b \; suffisament \; grand \rightarrow b > a$$

Pour l'intégrale sur l'intervalle supérieur, il vient :

$$\int_b^{+\infty} dr |f_r(r)| r^{\lambda-1} = \int_b^{+\infty} dr \frac{r^{\lambda-1}}{\left(r^2 + a^2 - 2a\,r\,Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}} \quad avec \quad \lambda \geq \frac{1}{2}$$

$$b > a \Rightarrow r - a > 0 \qquad \theta_0 \in [0, \pi] \rightarrow (r-a)^{2\lambda} \leq \left(r^2 + a^2 - 2a\,r\,Cos(\theta_0)\right)^{\lambda} \leq (r+a)^{2\lambda}$$

$$Cas \; \lambda = \frac{1}{2} \; déjà \; traité \quad Cas \; \lambda = 1 \Rightarrow \int_b^{+\infty} dr \frac{1}{\left(r^2 + a^2 - 2a\,r\,Cos(\theta_0)\right)} \leq \int_b^{+\infty} \frac{dr}{(r-a)^2} = \int_{b-a}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} \quad fini$$

$$Cas \; \lambda > 1 \Rightarrow \int_b^{+\infty} dr \frac{r^{\lambda-1}}{\left(r^2 + a^2 - 2a\,r\,Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}} \leq \int_b^{+\infty} dr \frac{r^{\lambda-1}}{(r-a)^{2\lambda}} = \frac{1}{a^{\lambda}} \int_{b'}^{+\infty} dr \frac{r^{\lambda-1}}{(r-1)^{2\lambda}}$$

$$De \; plus \; à \; partir \; d'une \; valeur \; r = b > 1 \; donnée \; la \; fonction \frac{1}{a^{\lambda}} \frac{r^{\lambda-1}}{(r-1)^{2\lambda}} \; est$$

$$- décroissante \; en \; \lambda \; pour \; \lambda \geq 1$$

$$- décroissante \; en \; r \; pour \; \lambda \geq 1$$

$$- quelque \; soit \; la \; valeur \; de \; a > 0$$

$$\int_{b'}^{+\infty} dr \frac{1}{a^{\lambda}} \frac{r^{\lambda-1}}{(r-1)^{2\lambda}} \leq \int_{b'}^{+\infty} dr \frac{1}{a^{\lambda'}} \frac{r^{\lambda'-1}}{(r-1)^{2\lambda'}} \; pour \; \lambda' \leq \lambda \quad la \; finitude \; est \; démontrée$$

.

Pour l'intégrale inférieure, il vient :

$$\int_0^c dr\left|f_r(r)\right|r^{\lambda-1} = \int_0^c dr \frac{r^{\lambda-1}}{\left(r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}} \quad avec \quad \lambda \geq \frac{1}{2}$$

$$c<a \Rightarrow r-a<0 \quad et \quad \theta_0 \in [0,\pi] \rightarrow (a-r)^{2\lambda} \leq \left(r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta_0)\right)^{\lambda} \leq (a+r)^{2\lambda}$$

$$\int_0^c dr \frac{r^{\lambda-1}}{(a+r)^{2\lambda}} \leq \int_0^c dr \frac{r^{\lambda-1}}{\left(r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta_0)\right)^{\lambda}} \leq \int_0^c dr \frac{r^{\lambda-1}}{(a-r)^{2\lambda}}$$

$$Cas \quad \lambda = \frac{1}{2} \; déjà \; traité$$

$$Posons \quad x=\frac{r}{a} \Rightarrow \int_0^c dr \frac{r^{\lambda-1}}{(a-r)^{2\lambda}} = \frac{1}{a^{\lambda}}\int_0^{c'} \frac{x^{\lambda-1}dx}{(1-x)^{2\lambda}} \quad x'=\frac{1}{x} \quad \frac{1}{a^{\lambda}}\int_0^{c'} \frac{x^{\lambda-1}dx}{(1-x)^{2\lambda}} = \frac{1}{a^{\lambda}}\int_{\infty}^{c''} \frac{x'^{1+\lambda}\,dx}{(x'-1)^{2\lambda}}$$

$$De \; plus \; à \; partir \; d'une \; valeur \; x'=c''>1 \; donnée \; la \; fonction \; \frac{1}{a^{\lambda}}\frac{x'^{1+\lambda}}{(x'-1)^{2\lambda}}$$

$$-décroissante \; en \; \lambda \; pour \; \lambda \geq 1$$

$$-décroissante \; en \; x' \; pour \; x' \geq 1$$

$$\int_{\infty}^{c''} \frac{1}{a^{\lambda}}\frac{x'^{1+\lambda}\,dx}{(x'-1)^{2\lambda}} \leq \int_{\infty}^{c''} \frac{1}{a^{\lambda'}}\frac{x'^{1+\lambda'}\,dx}{(x'-1)^{2\lambda'}} \quad pour \; \lambda' \leq \lambda \quad la \; finitude \; est \; démontrée$$

$$\Rightarrow \int_0^c dr\left|f_r(r)\right|r^{\lambda-1} \quad fini$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} dr\left|f_r(r)\right|r^{\lambda-1}$ *a donc une valeur finie.*

<u>Remarque sur le cas ϑ0=π/2</u> *: si l'angle d'ouverture du cône est droit, alors le cône forme un hyper-plan de séparation et le problème d'électrostatique est un problème plus connu de charges induites par une charge ponctuelle placée au dessus d'un hyper-plan, que l'on peut par exemple résoudre par la méthode des images électriques à n-dimensions, et dont la solution est le potentiel d'un dipôle, dont la charge opposée est placée symétriquement à l'hyper-plan. Dans ce cas on sait donc que le potentiel a la valeur suivante :*

$$T(r,\theta) = \frac{q}{\left(r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta)\right)^{\lambda}} - \frac{q}{\left(r^2+a^2+2a\,r\,Cos(\theta)\right)^{\lambda}}.$$

Revenons à la solution intégrale et calculons sa valeur lorsque $\vartheta_0=\pi/2$, il vient :

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Cos(\theta_0) = 0 \quad \frac{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(-Cos(\theta_0)\right)}{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta_0)\right)} = \frac{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}{P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)} = 1 \quad Sin(\theta_0) = 1$$

$$T(r,\theta) = \frac{q}{a^\lambda r^\lambda}\left(\begin{array}{l}\dfrac{1}{\left(\dfrac{r}{a}+\dfrac{a}{r}-2\,Cos(\theta)\right)^\lambda} - \\ -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\left(Sin(\theta)\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{2^\lambda\Gamma(\lambda)}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\left[\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{r}{a}\right)\right)\times P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right)\right]\end{array}\right)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right) = \frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)} \Rightarrow$$

$$T(r,\theta) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta)}} - \frac{q}{\sqrt{a}\sqrt{r}}\int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{Cosh(\pi\tau)}Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{r}{a}\right)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right)$$

Il faut donc prouver que :

$$\frac{1}{a^\lambda r^\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\left(Sin(\theta)\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{2^\lambda\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} d\tau\left[\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{r}{a}\right)\right)\times P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right)\right] = \frac{1}{\left(r^2+a^2+2a\,r\,Cos(\theta)\right)^\lambda}$$

D'après la formule intégrale, il vient avec le changement de variable ci-dessous :

$$\frac{1}{\left(Cos(\vartheta)+Cosh(x)\right)^\lambda} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cos(\tau\, x)P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\vartheta)\right)}{\Gamma(\lambda)\left(Sin(\vartheta)\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}}$$

$$\frac{1}{\left(r^2+a^2+2a\,r\,Cos(\theta)\right)^\lambda} = \frac{1}{a^\lambda r^\lambda}\frac{1}{\left(\dfrac{r}{a}+\dfrac{a}{r}+2\,Cos(\theta)\right)^\lambda}$$

$$Posons \quad x = Log\left(\frac{r}{a}\right) \Rightarrow \frac{r}{a}+\frac{a}{r} = 2Cosh(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\dfrac{r}{a}+\dfrac{a}{r}+2\,Cos(\theta)\right)^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\,\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{r}{a}\right)\right)P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\vartheta)\right)}{\Gamma(\lambda)\left(Sin(\vartheta)\right)^{\frac{2\lambda-1}{2}}}$$

$$Or\ l'expression\ s'écrit\ \frac{1}{a^\lambda r^\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\left(Sin(\theta)\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{2^\lambda\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} d\tau\left[\Gamma(\lambda+i\tau)\Gamma(\lambda-i\tau)Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{r}{a}\right)\right)\times P^{\frac{1-2\lambda}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a^\lambda r^\lambda}\frac{1}{\left(\dfrac{r}{a}+\dfrac{a}{r}+2\,Cos(\theta)\right)^\lambda} = \frac{1}{\left(r^2+a^2+2a\,r\,Cos(\theta)\right)^\lambda} \quad c.q.f.d$$

On retrouve un résultat identique à celui déduit de la méthode des images, c'est donc un bon indice que la formule de Lebedev est juste.

Prenons un autre exemple, où la fonction limite est constante sur un support bornée et nulle ailleurs :

$$f_r(r)=\begin{cases}T_0 & si \quad r\in[0,a] \\ 0 & si \quad r\in]a,+\infty)\end{cases} \quad \int_0^\infty dr|f_r(r)|r^{\lambda-1}=T_0\int_0^a dr\ r^{\lambda-1}=\frac{T_0\sqrt{a}}{\lambda} \quad finie$$

Plus généralement toute fonction limite à support bornée [0,a] et également bornée sur cette intervalle convient pour développer une solution intégrale, puisque.

$$|f_r(r)|\le C\Rightarrow\int_0^\infty dr|f_r(r)|r^{\lambda-1}\le C\int_0^a dr\ r^{\lambda-1}=\frac{C\sqrt{a}}{\lambda} \quad finie$$

.

Prenons maintenant des conditions aux limites de la forme :

$$f_r(r)=T_0\begin{cases}r^\beta & sur\ [0,r_0] \\ 0 & sur\ [r_0,+\infty]\end{cases} \quad \beta\ge 0$$

La condition s'écrit :

$$T_0\int_0^{r_0} dr\ r^{\beta+\lambda-1}=\frac{r_0^{\ \beta+\lambda}}{\beta+\lambda} \quad finie\ si\ \beta>-1/2$$

On peut donc calculer la représentation intégrale :

$$T(r,\theta)=\frac{1}{r^\lambda}\int_0^{+\infty}d\tau\left(F_c(\tau)Cos(\tau\ Log(r))+F_s(\tau)Sin(\tau\ Log(r))\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta_0))}\frac{(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{(Sin(\theta_0))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}$$

$$avec \quad F^c(\tau)=\frac{T_0}{\pi}\int_0^{r_0}dr\ r^{\beta+\lambda-1}Cos(\tau\ Log(r)) \qquad F^c(\tau)=\frac{T_0}{\pi}\int_0^{r_0}dr\ r^{\beta+\lambda-1}Sin(\tau\ Log(r))$$

$$C=\int_0^{r_0}dr\ r^{\beta+\lambda-1}Cos(\tau\ Log(r))=\int_{-\infty}^{\xi_0}d\xi\ e^{(\beta+\lambda)\xi}Cos(\tau\ \xi)=\frac{e^{(\beta+\lambda)\xi_0}\left((\beta+\lambda)Cos(\tau\ \xi_0)+\tau\ Sin(\tau\ \xi_0)\right)}{\left(\tau^2+(\beta+\lambda)^2\right)}$$

$$S=\int_0^{r_0}dr\ r^{\beta+\lambda-1}Sin(\tau\ Log(r))=\int_{-\infty}^{\xi_0}d\xi\ e^{(\beta+\lambda)\xi}Sin(\tau\ \xi)=\frac{e^{(\beta+\lambda)\xi_0}\left((\beta+\lambda)Sin(\tau\ \xi_0)-\tau\ Cos(\tau\ \xi_0)\right)}{\left(\tau^2+(\beta+\lambda)^2\right)}$$

$$\left(F^c(\tau)Cos(\tau\ Log(r))+F^s(\tau)Sin(\tau\ Log(r))\right)=\frac{T_0r_0^{\ (\beta+\lambda)}}{\pi}\frac{\left((\beta+\lambda)Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(\tau^2+(\beta+\lambda)^2\right)}$$

Il vient la solution sous forme de la représentation intégrale suivante :

$$T(r,\theta)=\frac{T_0r_0^{\ \beta}}{\pi}\left(\frac{r_0}{r}\right)^\lambda\int_0^{+\infty}d\tau\frac{\left((\beta+\lambda)Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(\tau^2+(\beta+\lambda)^2\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta_0))}\frac{(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{(Sin(\theta_0))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}$$

Lorsque β=0, soit des conditions aux limites constantes et à support borné, il vient :

$$T(r,\theta)=\frac{T_0}{\pi}\left(\frac{r_0}{r}\right)^\lambda\int_0^{+\infty}d\tau\frac{\left(\lambda\ Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(\tau^2+\lambda^2\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta_0))}\frac{(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{(Sin(\theta_0))^{\frac{1-2\lambda}{2}}}$$

.

Représentation intégrale pour le cas β=0 et ϑ_0=π/2

$$\frac{T(r,\theta)}{T_0}=\frac{r_0^{\beta}}{\pi}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\lambda}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left((\beta+\lambda)Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-\tau\,Sin\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(\tau^2+(\beta+\lambda)^2\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(0)}(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}$$

$$\beta=0\rightarrow\frac{T(r,\theta)}{T_0}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\lambda}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(\lambda\,Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-\tau\,Sin\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(\tau^2+\lambda^2\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(0)}(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}$$

Sur l'axe z, soit ϑ=0, en prenant en compte la limite à la singularité ϑ = 0 :

$$\lim_{\theta\to0^+}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cos(\theta))(Sin(\theta))^{\frac{1-2\lambda}{2}}=\left\{\begin{matrix}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2m+3}{2}\right)2^{\frac{2m+1}{2}}} & \lambda=m+1\\ \frac{1}{\Gamma(1+m)2^m}=\frac{1}{2^m\,m!} & \lambda=m+\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)2^{\frac{2\lambda-1}{2}}}$$

$$\theta=0\quad;\quad\frac{T(r,0)}{T_0}=\frac{r_0^{\beta}}{\pi\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)2^{\frac{2\lambda-1}{2}}}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\lambda}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left((\beta+\lambda)Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-\tau\,Sin\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(\tau^2+(\beta+\lambda)^2\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(0)}$$

$$\beta=0\rightarrow\frac{T(r,\theta)}{T_0}=\frac{1}{\pi\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)2^{\frac{2\lambda-1}{2}}}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\lambda}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(\lambda\,Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-\tau\,Sin\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(\tau^2+\lambda^2\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(0)}$$

La valeur de la fonction de Mehler en 0 est donnée par la formule :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(0)=\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-i\tau,\frac{1}{2}+i\tau;\frac{1+2\lambda}{2};\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+2\lambda}{2}\right)}={}_2\widetilde{F}_1\left(\frac{1}{2}-i\tau,\frac{1}{2}+i\tau;\frac{1+2\lambda}{2};\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}\rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{0}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}\qquad\lambda=1\rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\frac{1}{2}}(0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)$$

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}-i\tau,\frac{1}{2}+i\tau;\frac{1+2\lambda}{2};\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1+2\lambda}{2}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(l+\frac{1}{2}+i\tau\right)}{2^l\,l!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1+2\lambda}{2}+l\right)}=$$

$$=\Gamma\left(\frac{1+2\lambda}{2}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(l+\frac{1}{2}+i\tau\right)Cosh(\pi\tau)}{\pi 2^l\,l!\,\Gamma\left(\frac{1+2\lambda}{2}+l\right)}\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(0)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(l+\frac{1}{2}+i\tau\right)Cosh(\pi\tau)}{\pi 2^l\,l!\,\Gamma\left(\frac{1+2\lambda}{2}+l\right)}$$

.

Injectée dans la formule intégrale, il vient :

$$\theta=0 \quad ; \quad \frac{T(r,0)}{T_0}=\frac{r_0^{\beta}}{\pi\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)2^{\frac{2\lambda-1}{2}}}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\lambda}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left((\beta+\lambda)\,Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-\tau\,Sin\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(\tau^2+(\beta+\lambda)^2\right)\times{}_2\widetilde{F}_1\left(\frac{1}{2}-i\tau,\frac{1}{2}+i\tau;\frac{1+2\lambda}{2};\frac{1}{2}\right)}$$

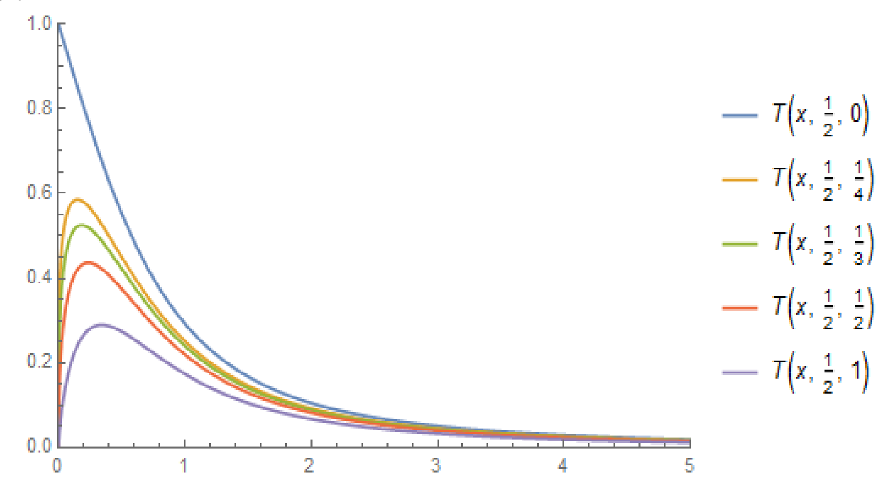
$$\beta=0\rightarrow\frac{T(r,\theta)}{T_0}=\frac{1}{\pi\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)2^{\frac{2\lambda-1}{2}}}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\lambda}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(\lambda\,Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-\tau\,Sin\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(\tau^2+\lambda^2\right)\times{}_2\widetilde{F}_1\left(\frac{1}{2}-i\tau,\frac{1}{2}+i\tau;\frac{1+2\lambda}{2};\frac{1}{2}\right)}$$

$$Cas\ particulier \quad \lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow{}_2\widetilde{F}_1\left(\frac{1}{2}-i\tau,\frac{1}{2}+i\tau;1;\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}$$

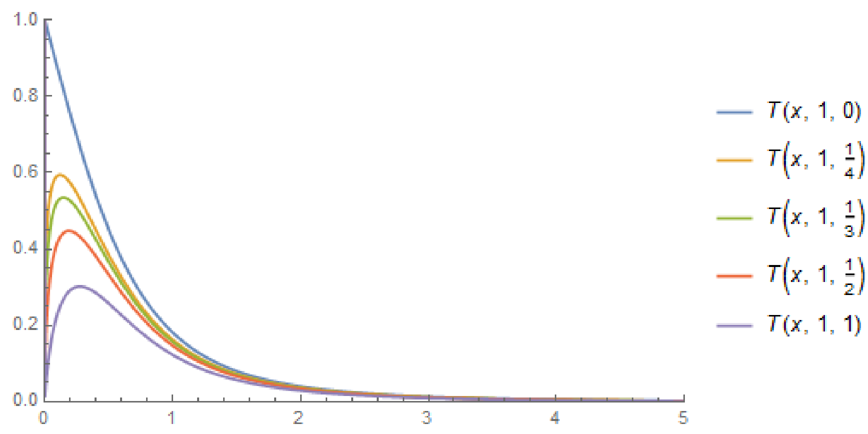
$$\Rightarrow\frac{T(r,0)}{T_0}=\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}r_0^{\beta}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left((2\beta+1)\,Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-2\tau\,Sin\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}{\left(4\tau^2+(2\beta+1)^2\right)}$$

$$\beta=0\Rightarrow\frac{T(r,0)}{T_0}=\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-2\tau\,Sin\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}{\left(4\tau^2+1\right)}$$

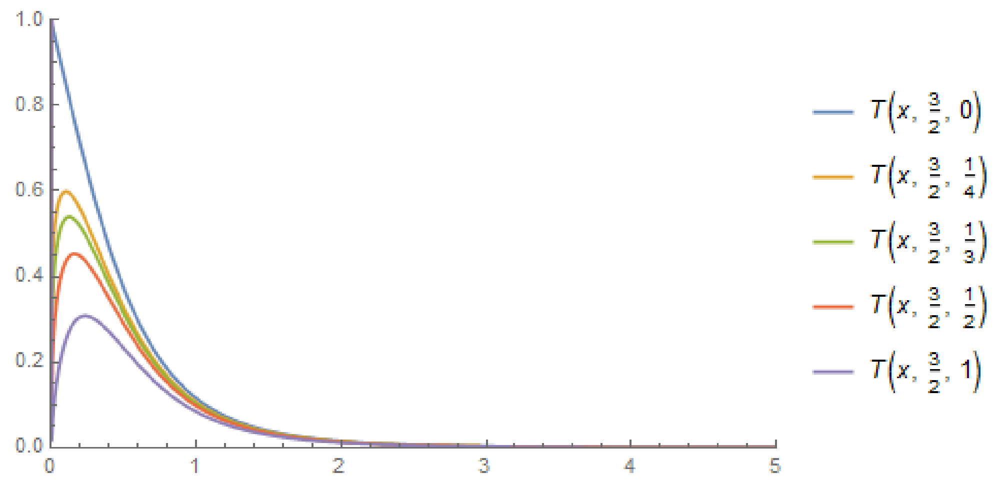
Voici les profils représentés graphiquement, suivant les diverses valeurs du paramètre β et λ :
En dimension 3 :



En dimension 4 :







Lien avec d'autres formules, solutions du même problème

Pour un cône ultra-sphérique non borné, dont nous avons également calculé la solution par un développement en série avec ce même type de fonction limite constante, la solution est la suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta^n_{r,\theta} T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\big| / \vec{\mathbf{x}} \in C_{\Omega n} \quad r=\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}} \\ C_{\Omega n}=\left\{\vec{x} / x_1 \in [0,\infty[, \sum_{i=2}^{n} x_i^{\,2} \in \left[0, x_1^{\,2}\left(\dfrac{Sin(\vartheta_0)}{Cos(\vartheta_0)}\right)^2\right]\right\} \\ \partial C_{\Omega n}=\left\{\vec{x} / x_1 \in [0,\infty[, \sum_{i=2}^{n} x_i^{\,2} = x_1^{\,2}(Tan(\vartheta_0))^2\right\} \\ C.L. \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ r\in[0,r_0]}} = T_0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ r\in]r_0,+\infty[}} = 0 \\ Lim_{r\to\infty} T(r,\theta)=0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\left\{\begin{array}{l} T_0\left(1+\sum_{l\neq 0,+\infty} \dfrac{1}{\nu_l \dfrac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial \nu}} \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{\nu_l} C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta))\right) \quad 0\le r\le r_0 \\ -T_0 \sum_{l\neq 0,+\infty} \dfrac{1}{(\nu_l+2\lambda)\dfrac{\partial C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)}{\partial \nu}} \left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{\nu_l+2\lambda} C^{\lambda}_{\nu_l}(Cos(\theta)) \quad r_0\le r<\infty \\ \nu_l \quad tq\ C^{\lambda}_{\nu_l}(\mu_0)=0 \quad \mu_0=Cos(\theta_0) \end{array}\right.$$

Dans ce cas les profils de solutions sur l'axe z, avec un angle d'ouverture du cône ultra-sphérique droit (un hyper-plan), suivant le paramètre dimensionnel λ était les suivant :

$$t=\frac{r}{r_0}\quad \frac{T(r,\theta)}{T_0}=F(t,\lambda)\quad \forall\lambda\in\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\cdots\right\},\quad F(t,\lambda)=1-\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}t\left[\frac{1}{\left(1+t^2\right)^{\lambda}}+(2\lambda-1)\;{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};-t^2\right)\right]$$

$$F\left(t,\lambda=\frac{1}{2}\right)=1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\quad F(t,\lambda=1)=1-\frac{2}{\pi}\left(\frac{t}{1+t^2}+ArcTan(t)\right)$$

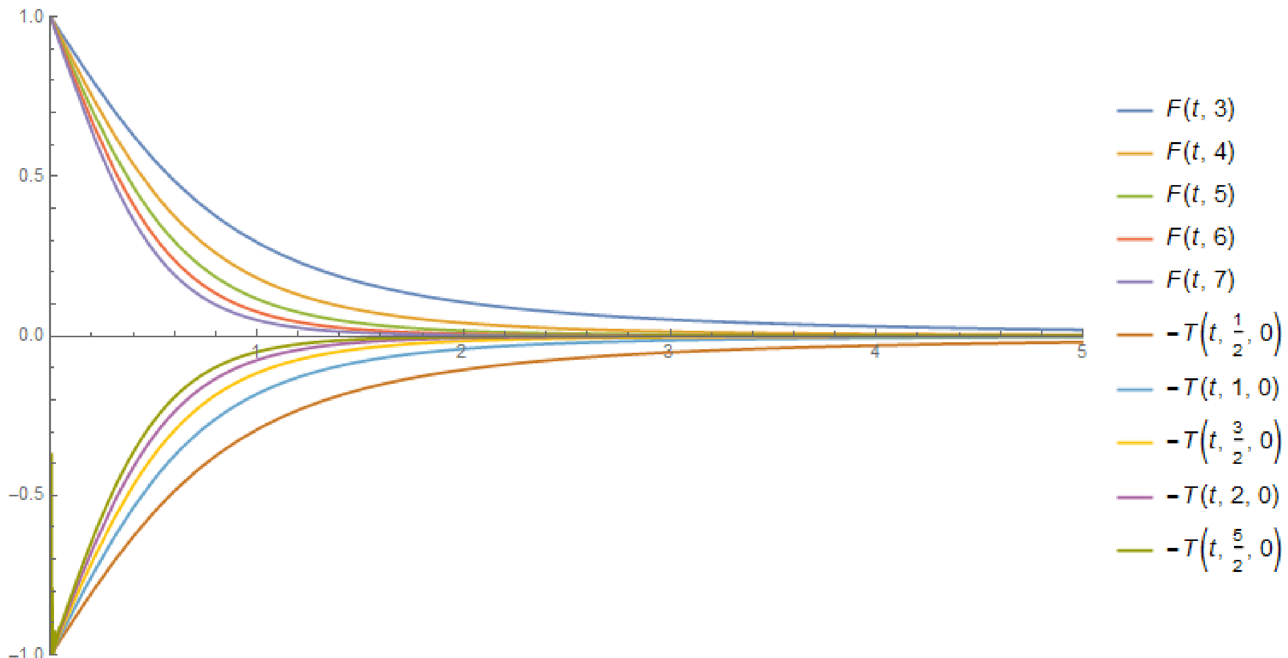
$$F\left(t,\lambda=\frac{3}{2}\right)=1-\frac{t\left(3+2t^2\right)}{2\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}\quad F(t,\lambda=2)=1-\frac{2}{3\pi}\left(\frac{t\left(5+3t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}+3ArcTan(t)\right)$$

$$F\left(t,\lambda=\frac{5}{2}\right)=1-\frac{t\left(15+20t^2+8t^4\right)}{8\left(1+t^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Autant dire qu'il faudrait démontrer que :

$$\frac{1}{\pi\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)2^{\frac{2\lambda-1}{2}}x^{\lambda}}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(\lambda\,Cos(\tau\,Log(x))-\tau\,Sin(\tau\,Log(x))\right)}{\left(\tau^2+\lambda^2\right)\times{}_2\tilde{F}_1\left(\frac{1}{2}-i\tau,\frac{1}{2}+i\tau;\frac{1+2\lambda}{2};\frac{1}{2}\right)}=1-\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\left[\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{\lambda}}+x(2\lambda-1)\;{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\lambda;\frac{3}{2};-x^2\right)\right]$$

Il est clair qu'en calculant numériquement ces intégrales afin d'en représenter le graphe par symétrie, les deux fonctions semblent coïncider numériquement :



.

Représentation des potentiels sous forme intégrale

Partons de l'expression d'un potentiel classique d'électrostatique, sous forme d'inverse de la distance, ainsi que les puissance d'un tel potentiel :

En coordonnées quelconque par convention $|\mathbf{r}| > |\mathbf{r}'|$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2|\mathbf{r}||\mathbf{r}'|Cos(\Theta)} = \sqrt{|\mathbf{r}||\mathbf{r}'|}\sqrt{\frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}'|} + \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|} - 2Cos(\Theta)} \quad \Theta \text{ angle entre } \mathbf{r} \text{ et } \mathbf{r}'$$

$$Posons \quad \frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}'|} = e^{\eta} > 1 \Rightarrow \frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}'|} + \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|} = 2Cosh(\eta) = 2\beta \quad \eta = Log\left(\frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}'|}\right)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{r}||\mathbf{r}'|}}\frac{1}{\sqrt{\beta - Cos(\vartheta - \vartheta')}} \qquad \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{r}||\mathbf{r}'|}}\frac{1}{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\Theta)}}$$

$$et \quad \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2\lambda}} = \frac{1}{(2|\mathbf{r}||\mathbf{r}'|)^{\lambda}}\frac{1}{(Cosh(\eta) - Cos(\Theta))^{\lambda}}$$

Comme :

$$\frac{1}{(Cosh(\eta) - Cos(\beta))^{\lambda}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\int_0^{+\infty} d\tau\,\Gamma(\lambda + i\tau)\Gamma(\lambda - i\tau)Cosh(\tau(\pi - \beta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cosh(\eta))}{\Gamma(\lambda)(Sinh(\eta))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}.$$

Il vient :

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2\lambda}} = \frac{1}{(2|\mathbf{r}||\mathbf{r}'|)^{\lambda}}\frac{1}{(Cosh(\eta) - Cos(\Theta))^{\lambda}}$$

$$\frac{1}{(Cosh(\eta) - Cos(\Theta))^{\lambda}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\int_0^{+\infty} d\tau\,\Gamma(\lambda + i\tau)\Gamma(\lambda - i\tau)Cosh(\tau(\pi - \Theta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cosh(\eta))}{\Gamma(\lambda)(Sinh(\eta))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2\lambda}} = \frac{1}{(2|\mathbf{r}||\mathbf{r}'|)^{\lambda}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\int_0^{+\infty} d\tau\,\Gamma(\lambda + i\tau)\Gamma(\lambda - i\tau)Cosh(\tau(\pi - \Theta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(Cosh(\eta))}{\Gamma(\lambda)(Sinh(\eta))^{\frac{2\lambda-1}{2}}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\tau\right) = \frac{\pi}{Cosh(\tau\,\pi)}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r}||\mathbf{r}'|}}\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Cosh(\tau(\pi - \Theta))}{Cosh(\tau\,\pi)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$sachant\ que \quad \eta = Log\left(\frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}'|}\right) \quad Cosh(\eta) = \frac{1}{2}\left(\frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}'|} + \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|}\right).$$

Quelques considérations sur les dérivées des fonctions de Gegenbauer et Legendre de première espèce par rapport à son degré. Valeurs de la dérivée aux degrés entiers pour des ordres entiers et demi-entiers

Dérivées premières par rapport au degré, fonctions de Legendre de degré quelconque

Il existe une formule appelée formule de Bromwich, du nom de son découvreur, portant sur la dérivée première des fonctions de Legendre de première, selon son degré lorsqu'il est entier, soit dériver formellement, selon le degré, les polynômes de Legendre :

$$\left.\frac{\partial P_{\lambda}(z)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=n} = P_n(z) Log\left(\frac{z+1}{2}\right) + R_n(z)$$

$R_n(z)$ *appelé polynome de Bromwich de degré n*

Cette formule est valable uniquement pour les degrés entiers. Mais d'autres formules sont également possibles pour déterminer la dérivée paramétrique à toute valeur degré entier ou réel. Ces dernières sont d'ailleurs plus commode à utiliser pour les degrés non entiers :

$$Formule\,1 \Rightarrow \frac{\partial P_{\nu}(z)}{\partial \nu} = \pi \frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)} P_{\nu}(z) - \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{(k!)^2} \left(\psi(k-\nu) - \psi(k+\nu+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\forall \nu >_k 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

$$Formule\,2 \Rightarrow \frac{\partial P_{\nu}(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \sum_{j=1}^{j=k} S_k^{(j)} \nu^j \sum_{r=1}^{r=k} (-1)^r S_k^{(k)} \left(\frac{j}{\nu} + \frac{r}{\nu+1}\right)(\nu+1)^r$$

$$\forall \nu > 0 \in \Re \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

où

$(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha\,(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) = \dfrac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* ; $\psi(\alpha) = \dfrac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$S_k^{(j)}$ *nombre de Stirling de première espèce*

D'autres formules sont possibles (voir Radoslaw-Szmytkowski-On the derivative of the Legendre function of the first kind with respect to its degree 2009), notamment celle de forme la plus simple :

$$Formule\ 3 \Rightarrow \frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{(k!)^2} \left(\psi(k+\nu+1) - \psi(\nu-k+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

la sommation peut partir de k = 1 également $\forall \nu >_k 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z}$ *tel que* $\left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$

où

$(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha\,(\alpha+1) \cdots (\alpha+k\text{-}1) = \frac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* ; $\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$S_k^{(j)}$ *nombre de Stirling de première espèce*

Les formules (1) à (3) proviennent de la dérivation terme à terme de la représentation en série hypergéométrique de Gauss de la fonction de Legendre de première espèce :

$$P_\nu(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{(k!)^2} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-z}{2}\right)$$

$\forall \nu >_k 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z}$ *tel que* $\left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$

où

$(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha\,(\alpha+1) \cdots (\alpha+k\text{-}1) = \frac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(\alpha)$ *fonction Gamma*

Sachant que la dérivée du symbole de Pochhammer est la suivante :

$$(\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)} \Rightarrow \frac{d(\alpha)_k}{d\alpha} = \frac{\Gamma'(\alpha+\mathrm{k})\Gamma(\alpha) - \Gamma(\alpha+\mathrm{k})\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)^2} = \frac{\Gamma'(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\alpha)_k}{d\alpha} = (\alpha)_k\left[\psi(\alpha+k) - \psi(\alpha)\right]$$

$(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha\,(\alpha+1) \cdots (\alpha+k\text{-}1) = \frac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(\alpha)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* ; $\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

Démonstration des formules 1 et 3 :

Sachant que $P_\nu(z)=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$ *tel que* $\left|\frac{1-z}{2}\right|<1$

Dérivation terme à terme

Formule $3\Rightarrow\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\psi(k+\nu+1)-\psi(k-\nu)+\psi(-\nu)-\psi(\nu+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$

$=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\psi(k+\nu+1)-\psi(k-\nu)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+(\psi(-\nu)-\psi(\nu+1))\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+$

$\left(\psi(\nu+1)-\psi(-\nu)\right)-(\psi(-\nu)-\psi(\nu+1))$

$=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\psi(k+\nu+1)-\psi(k-\nu)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+(\psi(-\nu)-\psi(\nu+1))\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$

$=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\psi(k+\nu+1)-\psi(k-\nu)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+(\psi(-\nu)-\psi(\nu+1))P_\nu(z)$

$=(\psi(-\nu)-\psi(\nu+1))P_\nu(z)-\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\psi(k-\nu)-\psi(k+\nu+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$

Comme $\psi(-\nu)-\psi(\nu+1)=\pi\frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)}$ *formule de réflexion de la fonction Psi ou Digamma*

il vient la formule $(1)\Rightarrow\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}=\pi\frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)}P_\nu(z)-\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\psi(k-\nu)-\psi(k+\nu+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$

Par une simple manipulation on retrouve la formule (3) dans sa plus simple expression

En retravaillant la formule (3), *puisque* : $-\psi(v+1)+\psi(-v)-\psi(k-v)=-\psi(v-k+1)$ *il vient*

$$Formule\ 3 \Rightarrow \frac{\partial P_v(z)}{\partial v} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-v)_k (v+1)_k}{(k!)^2} \left(\psi(k+v+1)-\psi(v-k+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

<u>Dérivées premières par rapport au degré, fonctions de Legendre de degré entier</u>

Des formules existent également permettant de calculer plus précisément les dérivées paramétriques des fonctions de Legendre de degré entiers, ainsi que les polynômes de Bromwich (voir Radosław Szmytkowski, On the derivative of the Legendre function of the first kind with respect to its degree, 2005), à savoir :

$$\left.\frac{\partial P_\lambda(z)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=n} = P_n(z) Log\left(\frac{z+1}{2}\right) + R_n(z)$$

$R_n(z)$ *appelé polynome de Bromwich de degré n*

Plusieurs formes pour $R_n(z)$

$$(1)\ R_n(z) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}\left[P_k(z)-P_{k-1}(z)\right]P_{n-k}(z)$$

$$(2)\ R_n(z) = 2\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^{n+k} \frac{2k+1}{(n-k)(n+k+1)}\left[P_k(z)-P_n(z)\right]$$

$$(2')\ R_n(z) = 2\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n+k-1} \frac{2k-1}{(n-k+1)(n+k)}\left[P_{k-1}(z)-P_n(z)\right]$$

$$(3)\ R_n(z) = 2\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(n+k)!}{(k!)^2 (n-k)!}\left[\psi(n+k+1)-\psi(n+1)\right]\left(\frac{z-1}{2}\right)^k$$

$$(4)\ R_n(z) = 2\left(\psi(2n+1)-\psi(n+1)\right)P_n(z) + 2\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n+k} \frac{2k+1}{(n-k)(n+k+1)} P_k(z)$$

$$(5)\ R_n(z) = 2\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{(k!)^2 (n-k)!}\left[\psi(n+k+1)-\psi(k+1)\right]\left(\frac{z+1}{2}\right)^k$$

$\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* ; $\psi(\alpha) = \dfrac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

Dérivées paramétriques des polynômes de Gegenbauer d'ordre demi-entier

Expression formelle des dérivées paramétriques selon le degré pour les fonctions/polynômes de Gegenbauer, valeur au degré 0

L'idée est de se placer sur une généralisation des polynômes de Legendre que sont les polynômes ultra-sphériques de Gegenbauer :

$$C_\nu^\lambda(z)=\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)}\;{}_2F_1\left(-\nu,\nu+2\lambda;\lambda+\frac{1}{2};\frac{1-z}{2}\right)=\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+2\lambda)_k}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_k(k!)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

Dérivation terme à terme $\Rightarrow$

$$\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}=\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+2\lambda)_k}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_k(k!)}\left(\psi(k+\nu+2\lambda)-\psi(\nu+2\lambda)+\psi(-\nu)-\psi(k-\nu)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+$$

$$+\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(\nu+1)}\{\psi(\nu+2\lambda)-\psi(\nu+1)\}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+2\lambda)_k}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_k(k!)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

De plus $\psi(-\nu)-\psi(k-\nu)=\psi(\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\Rightarrow$

$$\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(\nu+2\lambda)-\psi(\nu+1)\}C_\nu^\lambda(z)+\\[2ex]+\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)\Gamma(-\nu)}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+2\lambda+k)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)(k!)}\times\\[2ex]\times\left(\psi(k+\nu+2\lambda)-\psi(\nu+2\lambda)+\psi(\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

La formule précédente n'est pas commode à utiliser lorsque les degrés sont des entiers. Elle n'est d'ailleurs pas définie car les fonctions Gamma divergent aux pôles de l'expression.

Il se trouve que les termes de la série se présente sous une forme indéterminée lorsque le paramètre est nul, mais qu'un passage à la limite est tout de même possible et la valeur de la dérivée se simplifie comme ceci :

Partant de

$$\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(\nu+2\lambda)-\psi(\nu+1)\}C_\nu^\lambda(z)+\\ +\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)\Gamma(-\nu)}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+2\lambda+k)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)(k!)}\times\\ \times\left(\psi(k+\nu+2\lambda)-\psi(\nu+2\lambda)+\psi(\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0}=\{\psi(2\lambda)-\psi(1)\}C_\nu^\lambda(z)-\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\underset{\nu\to 0}{Lim}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{\Gamma(k)\Gamma(2\lambda+k)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)k!}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}\right]\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$forme\ indéterminée\quad \underset{\nu\to 0}{Lim}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}=\underset{\nu\to 0}{Lim}\frac{-\frac{1}{\nu}}{-\frac{1}{\nu}}=1$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0}=\{\psi(2\lambda)-\psi(1)\}C_0^\lambda(z)-\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma(2\lambda+k)}{k\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\qquad C_0^\lambda(z)=1$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0}=\{\psi(2\lambda)-\psi(1)\}-\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma(2\lambda+k)}{k\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

.

Ce qui donne pour le cas à trois dimensions la formule pour le polynôme de Legendre :

$$\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=-\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \quad or \quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k=-Log\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=Log\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

Voyons maintenant les cas où λ=3/2 et λ=5/2 :

$$\lambda=\frac{3}{2}\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=\{\psi(2\lambda)-\psi(1)\}+-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(2+k)}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \qquad \psi(z+n)-\psi(z)=\sum_{l=0}^{l=n-1}\frac{1}{z+l}$$

$$=\{\psi(3)-\psi(1)\}+-\frac{1}{2}\left(2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right) \quad \psi(3)-\psi(1)=\psi(1+2)-\psi(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k=-Log\left(\frac{1+z}{2}\right) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k=\frac{1-\left(1-\frac{1-z}{2}\right)}{1-\frac{1-z}{2}}=\frac{1-z}{1+z}$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k}{2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{k-1}=-\frac{d}{dz}\left(\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right)=-\frac{d}{dz}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)=\frac{2}{(1+z)^2}$$

$$\lambda=\frac{3}{2}\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=Log\left(\frac{1+z}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)+\frac{3}{2}=Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1+2z)}{(1+z)}$$

$$\lambda=\frac{5}{2}\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=\psi(5)-\psi(1)-\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma(5+k)}{k\,\Gamma(3+k)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k=\psi(5)-\psi(1)-\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(4+k)(3+k)}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\psi(5)-\psi(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{12+6+4+3}{12}=\frac{25}{12}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=\frac{25}{12}-\frac{1}{12}\left[\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{12}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+7\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+(1-z)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k}{2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{k-1}\right]$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{25}{12}-\frac{7}{12}\frac{(1-z)}{(1+z)}-\frac{2(1-z)}{12(1+z)^2}=Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{25}{12}-\frac{(1-z)(9+7z)}{12(1+z)^2}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{\{4+13z+8z^2\}}{3(1+z)^2}$$

.

Le cas où λ=(2p+1)/2 :

$$\lambda = \frac{2p+1}{2} \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \{\psi(2p+1) - \psi(1)\} - -\frac{p!}{(2p)!}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(2p+k)!}{k(p+k)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\psi(1+2p) - \psi(1) = \sum_{l=0}^{l=2p-1}\frac{1}{l+1} = \sum_{l'=1}^{'l'=2p}\frac{1}{l} = H_{2p} \quad H_{2p} \text{ nombre harmonique}$$

$$\text{Nombres harmoniques} \quad H_1 = 1 \quad H_2 = \frac{3}{2} \quad H_4 = \frac{25}{12} \quad H_6 = \frac{49}{20} \qquad H_8 = \frac{761}{280}$$

$$\frac{(2p+k)!}{(p+k)!} = \underbrace{(2p-0+k)(2p-1+k)\cdots(2p-(p-1)+k)}_{p \text{ fois}}$$

$$\frac{d^p}{dz^p}\left(\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+k}\right) = \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^p}{2^p k}(2p+k)(2p-1+k)\cdots(p+1+k)\left(\frac{1-z}{2}\right)^{p+k} =$$

$$= \frac{(-1)^p}{2^p}\left(\frac{1-z}{2}\right)^p\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(2p+k)!}{k(p+k)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(2p+k)!}{k(p+k)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k = (-1)^p 2^p\left(\frac{2}{1-z}\right)^p\frac{d^p}{dz^p}\left(\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+k}\right)$$

$$\text{De plus} \quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+k} = -\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p} Log\left[\frac{1+z}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = H_{2p} + \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p)!}\left(\frac{2}{1-z}\right)^p\frac{d^p}{dz^p}\left[\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p} Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right]$$

$$\text{Le terme en } Log\left[\frac{1+z}{2}\right] \text{égal à } 1 \quad \text{car } \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p)!}\left(\frac{2}{1-z}\right)^p\frac{d^p}{dz^p}\left[\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p}\right] \equiv 1$$

$$\text{Hypothèse} \quad \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + H_{2p} - \frac{(1-z)}{(1+z)^p} D_0^{\frac{2p+1}{2}}(z) \qquad D_0^{\frac{2p+1}{2}}(z) \quad \text{polynôme de degré } p-1$$

Où le polynôme du deuxième terme est à coefficients positifs avec les diverses valeurs suivantes :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = Log\left[\frac{1+z}{2}\right] - \frac{(1-z)}{(1+z)^p} D_0^{\frac{2p+1}{2}}(z)$$

$$p=0 \Rightarrow D_0^{\frac{1}{2}}(z) = 0$$

$$p=1 \Rightarrow D_0^{\frac{3}{2}}(z) = \frac{1}{2} \to \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + H_2 - \frac{1}{2}\frac{(1-z)}{(1+z)} = Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{1+2z}{(1+z)}$$

$$p=2 \Rightarrow D_0^{\frac{5}{2}}(z) = \frac{9+7z}{12} \to \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + H_4 - \frac{(9+7z)}{12}\frac{(1-z)}{(1+z)^2} = Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{4+13z+8z^2}{3(1+z)^2}$$

$$p=3 \Rightarrow D_0^{\frac{7}{2}}(z) = \frac{55+88z+37z^2}{60} \to \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{7}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + H_6 - \frac{\left(55+88z+37z^2\right)}{60}\frac{(1-z)}{(1+z)^3}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{7}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{23+102z+123\,z^2+46\,z^3}{15(1+z)^3}$$

Pour toute les valeurs de z et d'un degré demi-entier quelconque, l'expression s'écrit :

$$Calcul\ de\ D_0^{\frac{2p+1}{2}}(z)$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = H_{2p} + \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p)!}\left(\frac{2}{1-z}\right)^p \frac{d^p}{dz^p}\left[\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p} Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right]$$

$$D_0^{\frac{2p+1}{2}}(z) = \frac{(1+z)^p}{(1-z)}\left[\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} - H_{2p} - C_0^{\frac{2p+1}{2}}(z) Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right] = (1+z)^p\left[\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} - H_{2p} - Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right]$$

$$\Rightarrow D_0^{\frac{2p+1}{2}}(z) = \frac{(1+z)^p}{(1-z)}\left[\frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p)!}\left(\frac{2}{1-z}\right)^p \frac{d^p}{dz^p}\left[\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p} Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right] - Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right]$$

$$Comme\ \frac{d^p}{dz^p}\left[\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p} Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right] =$$

$$= \frac{(-1)^{p-1} p!(2p)!}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{(p-k-1)!}{k!(p-k)!(2p-k)!} \frac{(1-z)^{2p-k}}{(1+z)^{p-k}} + \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \frac{(2p)!}{p!} (1-z)^p Log\left[\frac{1+z}{2}\right]$$

$$et\ si\ k = p \rightarrow \frac{(-1)^p 2^{2p} p!}{(2p)!} \frac{d^p}{dz^p}\left[\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p}\right] = (1-z)^p$$

$$\Rightarrow D_0^{\frac{2p+1}{2}}(z) = -\frac{(p!)^2}{(1-z)} \sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{(p-k-1)!}{k!(p-k)!(2p-k)!} (1+z)^k (1-z)^{p-k} = -(p!)^2 \sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{(1+z)^k (1-z)^{p-1-k}}{(p-k)k!(2p-k)!}$$

$$\Rightarrow D_0^{\frac{2p+1}{2}}(z) = -(p!)^2 \sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{(1+z)^k (1-z)^{p-1-k}}{(p-k)k!(2p-k)!} \Rightarrow D_0^{\frac{2p+1}{2}}(0) = -(p!)^2 \sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{1}{(p-k)k!(2p-k)!}$$

.

__Expression formelle des dérivées paramétriques selon le degré pour les fonctions/polynômes de Gegenbauer, valeur au degré 1__

Regardons maintenant la valeur de la dérivée paramétrique pour v=1 :

$$\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(\nu+2\lambda)-\psi(\nu+1)\}C_\nu^\lambda(z)+\\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+2\lambda+k)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-\nu)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)k!}\times\\ \times\left(\psi(k+\nu+2\lambda)-\psi(\nu+2\lambda)+\psi(\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$or\ \lim_{\substack{\nu\to1\\k\geq2}}\psi(\nu-k+1)=\infty\quad et\quad \lim_{\nu\to1}\Gamma(-\nu)=\infty\quad et\quad \lim_{\substack{\nu\to1\\k=1}}\Gamma(k-\nu)=\infty$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\left[\begin{array}{l}\{\psi(1+2\lambda)-\psi(2)\}C_1^\lambda(z)+\\ \dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(1-\nu)\Gamma(2+2\lambda)}{\Gamma(-\nu)\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)}\times\\ \times\left(\psi(2+2\lambda)-\psi(1+2\lambda)+\psi(2)-\psi(1)\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)-\\ -\sum_{k=2}^{k=\infty}\left[\dfrac{\Gamma(k-1)\Gamma(1+2\lambda+k)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)k!}\dfrac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}\end{array}\right]$$

$$deux\ \ formes\ indéterminées\quad \lim_{\nu\to1}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)}\quad et\quad \lim_{\nu\to1}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}$$

$$\underset{z\to-n}{\Gamma(z)}\approx\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}\Rightarrow\underset{\nu\to1}{\Gamma(-\nu)}\approx-\frac{1}{1-\nu}\qquad \underset{z\to0}{\Gamma(z)}\approx\frac{1}{z}\Rightarrow\underset{\nu\to1}{\Gamma(1-\nu)}\approx\frac{1}{1-\nu}\Rightarrow\lim_{\nu\to1}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)}=-1$$

$$\underset{z\to-n}{\psi(z)}\approx-\frac{1}{n+z}\Rightarrow\underset{\nu\to1}{\psi(\nu-k+1)}=\underset{z\to2-k}{\psi(z)}\approx-\frac{1}{k-2+z}\approx-\frac{1}{\nu-1}\Rightarrow\lim_{\nu\to1}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}=-1$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\left[\begin{array}{l}\{\psi(1+2\lambda)-\psi(2)\}C_1^\lambda(z)+\\ +\dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\Gamma(2+2\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)}\left(\psi(2+2\lambda)-\psi(1+2\lambda)+\psi(2)-\psi(1)\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)+\\ +\sum_{k=2}^{k=\infty}\left[\dfrac{\Gamma(1+2\lambda+k)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)k(k-1)}\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}\end{array}\right].$$

Développons un peu plus le calcul :

$$\psi(2+2\lambda)-\psi(1+2\lambda)=\frac{1}{1+2\lambda}\quad \psi(2)-\psi(1)=1$$

$$\Rightarrow \psi(2+2\lambda)-\psi(1+2\lambda)+\psi(2)-\psi(1)=\frac{1}{1+2\lambda}+1=\frac{2+2\lambda}{1+2\lambda}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\left[\begin{array}{l}\{\psi(1+2\lambda)-\psi(2)\}C_1^\lambda(z)+\\ +\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\left\{-\frac{\Gamma(2+2\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{2+2\lambda}{1+2\lambda}\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)+\sum_{k=2}^{k=\infty}\left[\frac{\Gamma(1+2\lambda+k)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)k(k-1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\right\}\end{array}\right]$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(1+2\lambda)-\psi(2)\}C_1^\lambda(z)-\\ -\frac{\Gamma(3+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)(1+2\lambda)^2}(1-z)+\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\sum_{k=2}^{k=\infty}\left[\frac{\Gamma(1+2\lambda+k)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)k(k-1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(1+2\lambda)-\psi(2)\}C_1^\lambda(z)-\\ --\frac{\Gamma(3+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)(1+2\lambda)^2}(1-z)+\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{\Gamma(3+2\lambda+l)}{(l+1)(l+2)\Gamma\left(\lambda+\frac{5}{2}+l\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\end{array}\right\}$$

$$Si\ \lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\left\{-\frac{3}{2}(1-z)+\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{\Gamma(4+l)}{(l+1)(l+2)\Gamma(3+l)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\right\}$$

$$=\left\{-\frac{3}{2}(1-z)+\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{(3+l)}{(l+1)(l+2)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\right\}=\left\{-\frac{3}{2}(1-z)+\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\left(\frac{2}{(l+1)}-\frac{1}{(l+2)}\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\right\}$$

$$=\left\{-\frac{3}{2}(1-z)+\sum_{k=2}^{k=\infty}\left[\left(\frac{2}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\right\}=\left\{-\frac{3}{2}(1-z)-\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+\sum_{k=2}^{k=\infty}\left(\frac{2}{k-1}\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right\}$$

$$=\left\{-2\left(\frac{1-z}{2}\right)+Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\left(\frac{1-z}{2}\right)\sum_{l=1}^{k=\infty}\left(\frac{2}{l}\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right\}\quad \Leftarrow \sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k=-\left[Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\left(\frac{1-z}{2}\right)\right]$$

$$=\left\{-(1-z)+Log\left(\frac{1+z}{2}\right)-(1-z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)\right\}=\left\{-(1-z)+zLog\left(\frac{1+z}{2}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\left\{z-1+zLog\left(\frac{1+z}{2}\right)\right\}\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{1}{2}}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=-1$$

Ce dernier terme tend bien vers -1, pour le cas à 3 dimensions. Pour les autres dimensions,en z=0, il vient :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{ \begin{array}{l} \{\psi(1+2\lambda)-\psi(2)\}2\lambda\, z - \\ -\frac{\Gamma(3+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)(1+2\lambda)^2}(1-z) + \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{\Gamma(3+2\lambda+l)}{(l+1)(l+2)\Gamma\left(\lambda+\frac{5}{2}+l\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{ \begin{array}{l} \{\psi(1+2\lambda)-\psi(2)\}2\lambda\, z - \\ -\frac{\Gamma(3+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)(1+2\lambda)^2} + \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{4\Gamma(2\lambda)} \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{\Gamma(3+2\lambda+l)}{2^l(l+1)(l+2)\Gamma\left(\lambda+\frac{5}{2}+l\right)} \end{array} \right\}$$

$$\lambda = \frac{2p+1}{2} \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{ \begin{array}{l} (2p+1)z\{\psi(2p+2)-\psi(2)\} - \\ -\frac{(2p+1)(2p+3)}{(2p+2)}(1-z) + \frac{p!}{(2p)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{(2p+3+l)!}{(l+1)(l+2)(p+2+l)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l \end{array} \right\}$$

$$\psi(2p+2)-\psi(2) = \sum_{l=0}^{2p-1}\frac{1}{l+2} = \sum_{l=2}^{2p+1}\frac{1}{l} = \sum_{l=1}^{2p+1}\frac{1}{l} - 1 = H_{2p+1} - 1 \quad H_{2p+1}\ \textit{nombre harmonique}$$

$$H_3 - 1 = \frac{5}{6} \quad H_5 - 1 = \frac{77}{60} \quad H_7 - 1 = \frac{223}{140} \quad H_9 - 1 = \frac{4609}{2520} \quad H_{11} - 1 = \frac{55991}{27720}$$

$$p = 1 \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = 3z(H_3 - 1) + \left\{ -\frac{15}{4}(1-z) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{(l+4)(l+5)}{(l+1)(l+2)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l \right\}$$

$$= \frac{5z}{2} + \left\{ -\frac{15}{4}(1-z) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(1 + \frac{12}{l+1} - \frac{6}{l+2}\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^l \right\}$$

$$= \frac{5z}{2} + \left\{ -\frac{15}{4}(1-z) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \left[\sum_{l=0}^{l=\infty}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l + 12\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{1}{l+1}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l - 6\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{1}{l+2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l \right] \right\}$$

$$= \frac{5z}{2} + \left\{ -\frac{15}{4}(1-z) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \left[\frac{2}{1+z} + 12\left(\frac{2}{1-z}\right)\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l - 6\left(\frac{2}{1-z}\right)^2 \sum_{l=2}^{l=\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l \right] \right\}$$

$$= \frac{5z}{2} + \left\{ 3zLog\left(\frac{1+z}{2}\right) - \frac{9}{2}\left(\frac{1-z}{2}\right) + \frac{1}{1+z}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{ 3zLog\left(\frac{1+z}{2}\right) + \frac{5z^2+2z-2}{(1+z)} \right\} \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{3}{2}}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -2$$

Expression que l'on compare à celle proposée auparavant dans le texte pour les deux cas p=0 et p=1:

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)}$$

Numériquement elle semble coïncider également pour toutes les autres valeurs des ordres demi-entiers !

Faisons de même avec les polynômes de Gegenbauer de degré 1 et d'un ordre demi-entier quelconque pour déterminer l'expression formelle des dérivées paramétriques :

$$\lambda=\frac{2p+1}{2}\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z\{\psi(2p+2)-\psi(2)\}-\\-\frac{(2p+1)(2p+3)}{(2p+2)}(1-z)+\frac{p!}{(2p)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{(2p+3+l)!}{(l+1)(l+2)(p+2+l)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z(H_{2p+1}-1)-\frac{(2p+1)(2p+3)}{(2p+2)}(1-z)+\\+\frac{p!}{(2p)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{1}{(l+1)}-\frac{1}{(l+2)}\right](2p+3+l)(2p+2+l)\cdots(p+3+l)\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z(H_{2p+1}-1)-\frac{(2p+1)(2p+3)}{(2p+2)}(1-z)+\frac{p!}{(2p)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}(2p+2+l)(2p+1+l)\cdots(p+2+l)\left(\frac{1-z}{2}\right)^l-\\-\frac{p!}{(2p)!}\sum_{l=2}^{l=\infty}\frac{1}{l}(2p+1+l)(2p+l)\cdots(p+1+l)\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z(H_{2p+1}-1)-\frac{(2p+1)(2p+3)}{(2p+2)}(1-z)+\frac{p!}{(2p)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}(2p+2+l)(2p+1+l)\cdots(p+2+l)\left(\frac{1-z}{2}\right)^l+\\+(2p+1)(1-z)-\frac{p!}{(2p)!}\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}(2p+1+l)(2p+l)\cdots(p+1+l)\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\end{array}\right\}$$

$$Or\quad\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}(2p+1+l)(2p+l)\cdots(p+1+l)\left(\frac{1-z}{2}\right)^l=(-1)^{p+1}2^{p+1}\left(\frac{2}{1-z}\right)^p\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+1+l}\right)$$

$$et\ \sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}(2p+2+l)(2p+1+l)\cdots(p+2+l)\left(\frac{1-z}{2}\right)^l=(-1)^{p+1}2^{p+1}\left(\frac{2}{1-z}\right)^{p+1}\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+2+l}\right)$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z(H_{2p+1}-1)-(1-z)\frac{(2p+1)}{(2p+2)}+\frac{p!}{(2p)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)(-1)^{p+1}2^{p+1}\left(\frac{2}{1-z}\right)^{p+1}\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+2+l}\right)-\\-\frac{p!}{(2p)!}(-1)^{p+1}2^{p+1}\left(\frac{2}{1-z}\right)^p\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+1+l}\right)\end{array}\right\}$$

$$De\ plus\quad\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+2+l}=-\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+2}Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\quad et\quad\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+1+l}=-\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+1}Log\left[\frac{1+z}{2}\right]$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z(H_{2p+1}-1)-(1-z)\frac{(2p+1)}{(2p+2)}+\\+\frac{p!}{(2p)!}(-1)^{p+1}2^{p+1}\left(\frac{2}{1-z}\right)^p\left[\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+1}Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right)-\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+2}Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z(H_{2p+1}-1)-(1-z)\frac{(2p+1)}{(2p+2)}+\\+\frac{p!}{(2p)!}(-1)^{p+1}2^{p+1}\left(\frac{2}{1-z}\right)^p\left[\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+1}\left(\frac{1+z}{2}\right)Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right)\right]\end{array}\right\}$$

.

Calculons rapidement le terme en logarithme :

$$Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\frac{p!}{(2p)!}(-1)^{p+1}2^{p+1}\left(\frac{2}{1-z}\right)^{p}\left\{\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+1}\right)-\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+2}\right)\right\}$$

$$=Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\frac{p!}{(2p)!}(-1)^{p+1}\frac{1}{2^{p}}\left(\frac{2}{1-z}\right)^{p}\left\{\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left((1-z)^{2p+1}\right)-\frac{1}{2}\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left((1-z)^{2p+2}\right)\right\}$$

$$=Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\frac{p!}{(2p)!}(-1)^{p+1}\frac{1}{2^{p}}\left(\frac{2}{1-z}\right)^{p}\left\{(-1)^{p+1}(2p+1)\cdots(p+1)(1-z)^{p}-(-1)^{p+1}\frac{1}{2}(2p+2)\cdots(p+2)(1-z)^{p+1}\right\}$$

$$=Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\frac{p!}{(2p)!}(2p+1)\cdots(p+2)(p+1)z=z\,Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\frac{(2p+1)!}{(2p)!}=(2p+1)\,z\,Log\left[\frac{1+z}{2}\right]$$

Le terme en logarithme reproduit exactement celui attendu, soit le polynôme de Gegenbauer de degré 1 que multiplie le logarithme :

$$Terme\ logarithme\Rightarrow(2p+1)\,z\,Log\left[\frac{1+z}{2}\right]=C_{1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)Log\left[\frac{1+z}{2}\right].$$

Les autres termes font intervenir la formule de Leibniz pour les dérivées :

$$\left.\frac{\partial C_{\nu}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}==\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z\left(H_{2p+1}-1\right)-(1-z)\dfrac{(2p+1)}{(2p+2)}+\\+\dfrac{(-1)^{p+1}2^{p+1}p!}{(2p)!}\left(\dfrac{2}{1-z}\right)^{p}\left[\dfrac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^{2p+1}Log\left[\dfrac{1+z}{2}\right]\right)-\dfrac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^{2p+2}Log\left[\dfrac{1+z}{2}\right]\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$Formule\ de\ Leibniz\quad\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left[f(z)g(z)\right]=\sum_{k=0}^{k=p+1}\frac{(p+1)!}{k!(p+1-k)!}f^{(k)}(z)g^{(p+1-k)}(z)$$

$$\left[\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+1}\right]^{(k)}=\frac{(-1)^{k}}{2^{2p+1}}\frac{(2p+1)!}{(2p+1-k)!}(1-z)^{2p+1-k}\quad et\quad\left[\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+2}\right]^{(k)}=\frac{(-1)^{k}}{2^{2p+2}}\frac{(2p+2)!}{(2p+2-k)!}(1-z)^{2p+2-k}$$

$$\Rightarrow si\ k=p+1\rightarrow\frac{(-1)^{p+1}2^{p+1}p!}{(2p)!}\left(\frac{2}{1-z}\right)^{p}\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left[\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+1}\right]=\frac{(2p+1)!}{(2p)!}=2p+1$$

$$\Rightarrow si\ k=p+1\rightarrow\frac{(-1)^{p+1}2^{p+1}p!}{(2p)!}\left(\frac{2}{1-z}\right)^{p}\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+2}\right)=(2p+1)(1-z)$$

$$\left[Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right]^{(p+1-k)}=\left[(1+z)^{-1}\right]^{(p-k)}=(-1)^{p-k}\frac{(p-k)!}{(1+z)^{p+1-k}}$$

$$\Rightarrow\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+1}Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right)-\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+2}Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(1-z)^{p}\dfrac{(-1)^{p}}{2^{2p+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=p}\dfrac{(p+1)!}{k!(p+1-k)}\dfrac{(2p+1)!}{(2p+1-k)!}\dfrac{(1-z)^{p+1-k}}{(1+z)^{p+1-k}}-\\-(1-z)^{p}\dfrac{(-1)^{p}}{2^{2p+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=p}\dfrac{(p+1)!}{k!(p+1-k)}\dfrac{1}{2}\dfrac{(2p+2)!}{(2p+2-k)!}\dfrac{(1-z)^{p+2-k}}{(1+z)^{p+1-k}}+\\+\left[\dfrac{(-1)^{p+1}2^{p+1}p!}{(2p)!}\left(\dfrac{2}{1-z}\right)^{p}\right]^{-1}(2p+1)z\,Log\left[\dfrac{1+z}{2}\right]\end{array}\right\}$$

.

En continuant le calcul, il vient :

$$=(1-z)^p\frac{(-1)^p}{2^{2p+1}}\left[\sum_{k=0}^{k=p}\frac{(p+1)!}{k!(p+1-k)}\frac{(2p+1)!}{(2p+1-k)!}\frac{(1-z)^{p+1-k}}{(1+z)^{p+1-k}}-\left(\frac{1-z}{2}\right)\sum_{k=0}^{k=p}\frac{(p+1)!}{k!(p+1-k)}\frac{(2p+2)!}{(2p+2-k)!}\frac{(1-z)^{p+1-k}}{(1+z)^{p+1-k}}\right]+$$

$$+\left[\frac{(-1)^{p+1}2^{p+1}p!}{(2p)!}\left(\frac{2}{1-z}\right)^p\right]^{-1}(2p+1)z\,Log\left[\frac{1+z}{2}\right]$$

$$=(1-z)^p\frac{(-1)^p}{2^{2p+1}}\sum_{k=0}^{k=p}\frac{(p+1)!}{(p+1-k)k!}\frac{(2p+1)!}{(2p+1-k)!}\frac{(1-z)^{p+1-k}}{(1+z)^{p+1-k}}\left[1-(1-z)\frac{(p+1)}{(2p+2-k)}\right]+$$

$$+\left[\frac{(-1)^{p+1}2^{p+1}p!}{(2p)!}\left(\frac{2}{1-z}\right)^p\right]^{-1}(2p+1)z\,Log\left[\frac{1+z}{2}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+1}Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right)-\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2p+2}Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\right)=$$

$$=(1-z)^p\frac{(-1)^p(p+1)!(2p+1)!}{2^{2p+1}}\sum_{k=0}^{k=p}\frac{(p+1-k+z(p+1))}{(p+1-k)k!(2p+2-k)!}\frac{(1-z)^{p+1-k}}{(1+z)^{p+1-k}}+$$

$$+\left[\frac{(-1)^{p+1}2^{p+1}p!}{(2p)!}\left(\frac{2}{1-z}\right)^p\right]^{-1}(2p+1)z\,Log\left[\frac{1+z}{2}\right]$$

Comme
$$\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z(H_{2p+1}-1)-(1-z)\dfrac{(2p+1)}{(2p+2)}+\\ +\dfrac{(-1)^{p+1}2^{p+1}p!}{(2p)!}\left(\dfrac{2}{1-z}\right)^p\left[\begin{array}{l}\dfrac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^{2p+1}Log\left[\dfrac{1+z}{2}\right]\right)-\\ -\dfrac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\left(\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^{2p+2}Log\left[\dfrac{1+z}{2}\right]\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z\,Log\left[\dfrac{1+z}{2}\right]+(2p+1)z(H_{2p+1}-1)-(1-z)\dfrac{(2p+1)}{(2p+2)}-\\ -(2p+1)p!(p+1)!\displaystyle\sum_{k=0}^{k=p}\frac{(p+1-k+z(p+1))}{(p+1-k)k!(2p+2-k)!}\frac{(1-z)^{p+1-k}}{(1+z)^{p+1-k}}\end{array}\right\}$$

On remarque que le terme k=0 de la série permet de factoriser (1+z) au numérateur, en l'isolant, il vient :

$$\left.\frac{\partial C_{\nu}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z\,Log\left[\frac{1+z}{2}\right]+(2p+1)z\left(H_{2p+1}-1\right)-(1-z)\frac{(2p+1)}{(2p+2)}-\\-(2p+1)p!(p+1)!\sum_{k=0}^{k=p}\frac{(p+1-k+z(p+1))}{k!(p+1-k)(2p+2-k)!}\frac{(1-z)^{p+1-k}}{(1+z)^{p+1-k}}\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z\,Log\left[\frac{1+z}{2}\right]+(2p+1)z\left(H_{2p+1}-1\right)-\\-(1-z)\frac{(2p+1)}{(2p+2)}-\frac{(p!)^2}{2(2p)!}\frac{(1-z)^{p+1}}{(1+z)^{p}}-\\-(2p+1)p!(p+1)!\sum_{k=1}^{k=p}\frac{(p+1-k+z(p+1))}{k!(p+1-k)(2p+2-k)!}\frac{(1-z)^{p+1-k}}{(1+z)^{p+1-k}}\end{array}\right\}\Leftarrow l=k-1\Leftrightarrow k=l+1$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z\,Log\left[\frac{1+z}{2}\right]+(2p+1)z\left(H_{2p+1}-1\right)-\frac{(1-z)}{(1+z)^{p}}\frac{(2p+1)(1+z)^{p}}{(2p+2)}-\\-\frac{(1-z)}{(1+z)^{p}}\frac{(p!)^2}{2(2p)!}(1-z)^{p}-\\-(2p+1)p!(p+1)!\frac{(1-z)}{(1+z)^{p}}\sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{(p-l+z(p+1))}{(l+1)!(p-l)(2p+1-l)!}(1-z)^{p-1-l}(1+z)^{l}\end{array}\right\}\Leftarrow Factorisation\ de\ \frac{(1-z)}{(1+z)^{p}}$$

$$\left.\frac{\partial C_{\nu}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z\,Log\left[\frac{1+z}{2}\right]+(2p+1)z\left(H_{2p+1}-1\right)-\\-\frac{(1-z)}{(1+z)^{p}}\left[\begin{array}{l}\frac{(2p+1)(1+z)^{p}}{(2p+2)}+\frac{(p!)^2}{2(2p)!}(1-z)^{p}+\\+(2p+1)p!(p+1)!\sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{(p-l+z(p+1))}{(l+1)!(p-l)(2p+1-l)!}(1-z)^{p-1-l}(1+z)^{l}\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

Avec les notations précédentes on écrirait :

$$\left.\frac{\partial C_{\nu}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=(2p+1)zLog\left[\frac{1+z}{2}\right]+\frac{(2p+1)z(1+z)^{p}\left(H_{2p+1}-1\right)}{(1+z)^{p}}-\frac{(1-z)}{(1+z)^{p}}D_{1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)\quad H_{2p+1}\ nombre\ harmonique$$

$$Avec\quad D_{1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)=\left[\begin{array}{l}\frac{(2p+1)(1+z)^{p}}{(2p+2)}+\frac{(p!)^2}{2(2p)!}(1-z)^{p}+\\+(2p+1)p!(p+1)!\sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{(p-l+z(p+1))}{(p-l)(l+1)!(2p+1-l)!}(1-z)^{p-1-l}(1+z)^{l}\end{array}\right]$$

La valeur en z=0 est alors :

$$\left.\frac{\partial C_{\nu}^{\frac{2p+1}{2}}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=-\left[\frac{(2p+1)}{(2p+2)}+\frac{(p!)^2}{2(2p)!}+(2p+1)p!(p+1)!\sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{1}{(l+1)!(2p+1-l)!}\right]$$

Cette valeur est censée redonner celle plus connue :

$$\left.\frac{\partial C_{\nu}^{\frac{2p+1}{2}}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -2^{2p}\frac{(p!)^2}{(2p)!}$$

A partir des deux expressions de séries finies :

$$(1)\quad \sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{1}{l!(2p-l)!}=\frac{1}{2}\left(\frac{2^{2p}}{(2p)!}-\frac{1}{(p!)^2}\right)\qquad (2)\quad \sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{1}{(l+1)!(2p-l)!}=\frac{2^{2p}-1}{(2p+1)(2p)!}.$$

en changeant les variables de l'expression (1), il vient :

$$\sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{1}{l!(2p-l)!}=\frac{1}{(2p)!}+\sum_{l=1}^{l=p-1}\frac{1}{l!(2p-l)!}\leftarrow l'=l-1\quad l=l'+1$$

$$\sum_{l=1}^{l=p-1}\frac{1}{l!(2p-l)!}=\sum_{l'=0}^{l'=p-2}\frac{1}{(l'+1)!(2p-1-l')!}=\sum_{l'=0}^{l'=p'-1}\frac{1}{(l'+1)!(2p'+1-l')!}=\leftarrow\begin{cases}l'=l-1 & l=l'+1\\ p'=p-1 & p=p'+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sum_{l'=0}^{l'=p'-1}\frac{1}{(l'+1)!(2p'+1-l')!}=\frac{1}{2}\left(\frac{2^{2p}}{(2p)!}-\frac{1}{(p!)^2}\right)-\frac{1}{(2p)!}=\frac{1}{2}\left(\frac{2^{2p'+2}}{(2p'+2)!}-\frac{1}{((p'+1)!)^2}\right)-\frac{1}{((2p'+2))!}$$

$$\Rightarrow\sum_{l'=0}^{l=p-1}\frac{1}{(l+1)!(2p+1-l)!}=\frac{2^{2p+1}-1}{(2p+2)!}-\frac{1}{2}\frac{1}{((p+1)!)^2}$$

Une fois cette expression calculée, il vient dans l'expression de départ :

$$\frac{(2p+1)}{(2p+2)}+\frac{(p!)^2}{2(2p)!}+(2p+1)p!(p+1)!\sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{1}{(l+1)!(2p+1-l)!}=$$

$$=\frac{(2p+1)}{(2p+2)}+\frac{(p!)^2}{2(2p)!}+(2p+1)p!(p+1)!\left[\frac{2^{2p+1}-1}{(2p+2)!}-\frac{1}{2}\frac{1}{((p+1)!)^2}\right]$$

$$=\frac{(2p+1)}{(2p+2)}-\frac{(2p+1)}{2(p+1)}+\frac{(p!)^2}{2(2p)!}+(2p+1)p!(p+1)!\frac{2^{2p+1}-1}{(2p+2)!}$$

$$=\frac{(p!)^2}{2(2p)!}+(p!)^2\frac{2^{2p+1}-1}{2(2p)!}=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}$$

C'est le résultat qu'il fallait démontrer.

Formule de récurrence sur les dérivées paramétriques des polynômes de Legendre, démonstration par récurrence de la formule de Bromwich pour les polynômes de Legendre

Revenons maintenant aux fonctions de Gegenbauer, pour déterminer une formule de récurrence sur les dérivées paramétriques ne partant de celle liant les fonctions de Gegenbauer :

$$(\nu+1)C_{\nu+1}^{\lambda}(z)-2(\lambda+\nu)zC_{\nu}^{\lambda}(z)+(2\lambda+\nu-1)C_{\nu-1}^{\lambda}(z)=0$$

$$Dérivation\,terme\,à\,terme \Rightarrow$$

$$(\nu+1)\frac{\partial C_{\nu+1}^{\lambda}(z)}{\partial\nu}-2(\lambda+\nu)z\frac{\partial C_{\nu}^{\lambda}(z)}{\partial\nu}+(2\lambda+\nu-1)\frac{\partial C_{\nu-1}^{\lambda}(z)}{\partial\nu}=-C_{\nu+1}^{\lambda}(z)+2zC_{\nu}^{\lambda}(z)-C_{\nu-1}^{\lambda}(z)$$

Cette formule appliquée aux polynômes de Legendre, il vient :

$$(\nu+1)\frac{\partial P_{\nu+1}(z)}{\partial\nu}-(1+2\nu)z\frac{\partial P_{\nu}(z)}{\partial\nu}+\nu\frac{\partial P_{\nu-1}(z)}{\partial\nu}=-P_{\nu+1}(z)+2zP_{\nu}(z)-P_{\nu-1}(z)$$

.

Avec les termes de départ de la récurrence sur ces polynômes, on peut imaginer la forme générale des dérivées paramétriques :

$$P_{-1}(z)=0 \quad P_0(z)=1$$

$$(\nu+1)P_{\nu+1}(z)-(2\nu+1)zP_{\nu}(z)+\nu P_{\nu-1}(z)=0 \Rightarrow P_1(z)=z$$

$$\frac{\partial P_{-1}(z)}{\partial\nu}=0 \quad \frac{\partial P_0(z)}{\partial\nu}=Log\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

$$Comme \quad (\nu+1)\frac{\partial P_{\nu+1}(z)}{\partial\nu}-(1+2\nu)z\frac{\partial P_{\nu}(z)}{\partial\nu}+\nu\frac{\partial P_{\nu-1}(z)}{\partial\nu}=-P_{\nu+1}(z)+2zP_{\nu}(z)-P_{\nu-1}(z)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=zLog\left(\frac{1+z}{2}\right)+z$$

$$Hypothèse \quad \left.\frac{\partial P_n(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=P_n(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+R_n(z)$$

$$avec \quad (n+1)P_{n+1}(z)-(2n+1)zP_n(z)+\nu P_{n-1}(z)=0 \quad valable \quad pour\ n\geq 1$$

$$et\ P_{-1}(z)=0 \quad P_0(z)=1$$

$$et\ (n+1)R_{n+1}(z)-(1+2n)zR_n(z)+nR_{n-1}(z)=-P_{n+1}(z)+2zP_n(z)-P_{n-1}(z) \quad valable \quad pour\ n\geq 1$$

$$et\ R_{-1}(z)=0 \quad R_0(z)=0$$

La proposition est vraie pour les termes de départ, supposons-la vraie pour le terme n, il vient pour le terme n+1 :

$$\left.\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = P_n(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + R_n(z)$$

$$(n+1)\frac{\partial P_{n+1}(z)}{\partial \nu} = (1+2n)z\frac{\partial P_n(z)}{\partial \nu} - n\frac{\partial P_{n-1}(z)}{\partial \nu} - P_{n+1}(z) + 2zP_n(z) - P_{n-1}(z)$$

$$\Rightarrow (n+1)\frac{\partial P_{n+1}(z)}{\partial \nu} = (1+2n)z\left[P_n(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + R_n(z)\right] - n\left[P_{n-1}(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + R_{n-1}(z)\right] -$$

$$- P_{n+1}(z) + 2zP_n(z) - P_{n-1}(z)$$

$$\Rightarrow (n+1)\frac{\partial P_{n+1}(z)}{\partial \nu} = Log\left(\frac{1+z}{2}\right)\left[(1+2n)zP_n(z) - nP_{n-1}(z)\right] + (1+2n)zR_n(z) - nR_{n-1}(z) -$$

$$- P_{n+1}(z) + 2zP_n(z) - P_{n-1}(z)$$

$$Or \quad (1+2n)zR_n(z) - nR_{n-1}(z) - P_{n+1}(z) + 2zP_n(z) - P_{n-1}(z) = (n+1)R_{n+1}(z)$$

$$et \quad (1+2n)zP_n(z) - nP_{n-1}(z) = (n+1)P_{n+1}(z)$$

$$Donc \quad (n+1)\frac{\partial P_{n+1}(z)}{\partial \nu} = (n+1)P_{n+1}(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + (n+1)R_{n+1}(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_{n+1}(z)}{\partial \nu} = P_{n+1}(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + R_{n+1}(z)$$

Ce qui démontre la récurrence.

<u>Formule de récurrence sur les dérivées paramétriques des polynômes de Gegenbauer de degré demi-entier, nouvelle formule de Bromwich pour les polynômes de Gegenbauer de degré demi-entier</u>

L'hypothèse de récurrence est la suivante :

$$\left.\frac{\partial C_{\nu}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = C_n^{\frac{2p+1}{2}}(z) Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{R_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{(1+z)^p}$$

$$(n+1)C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - (2p+1+2n)zC_n^{\frac{2p+1}{2}}(z) + (2p+n)C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) = 0 \quad pour\ n \geq 1$$

$$Départ\ de\ la\ récurrence \quad C_{-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) = 0 \quad C_0^{\frac{2p+1}{2}}(z) = 1$$

$$(n+1)R_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - (2p+1+2n)zR_n^{\frac{2p+1}{2}}(z) + (2p+n)R_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) = (1+z)^p\left[-C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) + 2zC_n^{\frac{2p+1}{2}}(z) - C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)\right]$$

$$à\ partir\ de\ n \geq 1$$

$$Départ\ de\ la\ récurrence \quad R_0^{\frac{2p+1}{2}}(z) = H_{2p}(1+z)^p - (p!)^2(1-z)\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{(1+z)^k(1-z)^{p-1-k}}{(p-k)k!(2p-k)!} \quad p>0 \quad R_0^{\frac{1}{2}}(z) = 0$$

$$R_1^{\frac{2p+1}{2}}(z) = \left\{\begin{array}{l} (2p+1)z(1+z)^p\{H_{2p+1}-1\} - \\ -(1-z)\left[\begin{array}{l} \frac{(2p+1)(1+z)^p}{(2p+2)} + \frac{(p!)^2}{2(2p)!}(1-z)^p + \\ +(2p+1)p!(p+1)!\sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{(p-l+z(p+1))}{(l+1)!(p-l)(2p+1-l)!}(1-z)^{p-1-l}(1+z)^l \end{array}\right] \end{array}\right\} \quad p>0$$

$$R_1^{\frac{1}{2}}(z) = z-1 \qquad H_{2p}\ et\ H_{2p+1} \quad nombres\ harmoniques \quad H_n = \sum_{l'=1}^{l'=n}\frac{1}{l}$$

Déterminons la loi de récurrence sur les polynômes de « Bromwich ultra-sphériques », et démontrons qu'ils sont des polynômes !

$$\left.\frac{\partial C_{\nu}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = C_{n}^{\frac{2p+1}{2}}(z)Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{R_{n}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{(1+z)^{p}} \quad avec \quad R_{n}^{\frac{2p+1}{2}}(z) \quad polynôme\ de\ degré\ p+n$$

$$(\nu+1)C_{\nu+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - (2p+1+2\nu)zC_{\nu}^{\frac{2p+1}{2}}(z) + (2p+\nu)C_{\nu-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) = 0$$

$$\Rightarrow C_{\nu+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) = \frac{(2p+1+2\nu)zC_{\nu}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - (2p+\nu)C_{\nu-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{(\nu+1)}$$

$$(\nu+1)\frac{\partial C_{\nu+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu} - (2p+1+2\nu)z\frac{\partial C_{\nu}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu} + (2p+\nu)\frac{\partial C_{\nu-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu} = -C_{\nu+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) + 2zC_{\nu}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - C_{\nu-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow (n+1)\left[C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{R_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{(1+z)^{p}}\right] - (2p+1+2n)z\left[C_{n}^{\frac{2p+1}{2}}(z)Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{R_{n}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{(1+z)^{p}}\right] +$$

$$(2p+n)\left[C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{R_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{(1+z)^{p}}\right] = -C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) + 2zC_{n}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow Log\left[\frac{1+z}{2}\right]\left[\underbrace{(n+1)C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - (2p+1+2n)z + (2p+n)C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}_{=0}\right] +$$

$$+\frac{1}{(1+z)^{p}}\left[(n+1)R_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - (2p+1+2n)zR_{n}^{\frac{2p+1}{2}}(z) + (2p+n)R_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)\right] = -C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) + 2zC_{n}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow (n+1)R_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - (2p+1+2n)zR_{n}^{\frac{2p+1}{2}}(z) + (2p+n)R_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) =$$

$$= (1+z)^{p}\left[-C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) + 2zC_{n}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)\right] \quad pour\ n \geq 1$$

$$\Rightarrow (n+1)R_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - (2p+1+2n)zR_{n}^{\frac{2p+1}{2}}(z) + (2p+n)R_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) = -\frac{(1+z)^{p}(2p-1)}{(n+1)}\left[\underbrace{zC_{n}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}_{plus\ commode\ pour\ démontrer\ le\ degré\ n+p\ du\ polynô}\right]$$

La relation de récurrence sur le polynômes R prouvent qu'ils sont bien de degré n+p.

Et d'autre part, on retrouve bien pour le cas p=0, la relation de récurrence des polynômes de Bromwich, à savoir :

$$(n+1)R_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)-(2p+1+2n)zR_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)+(2p+n)R_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)=(1+z)^p\left[-C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)+2zC_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)-C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)\right]$$

$$p=0\Rightarrow(n+1)R_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)-(1+2n)zR_n^{\frac{1}{2}}(z)+nR_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)=-C_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)+2zC_n^{\frac{1}{2}}(z)-C_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)$$

On vient donc de trouver au moins pour les fonctions/polynômes Gegenbauer d'ordre demi-entier et de degré entiers, une formule équivalente à la formule de Bromwich pour les polynômes de Legendre.

Application de la formule de Bromwich au calcul des fonctions de Gegenbauer de deuxième espèce de degré entier et d'ordre demi-entier

Les formules de liaisons pour les fonctions Gegenbauer de première et deuxième espèce sont les suivante. :

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\frac{\pi}{2}\frac{Cos(\nu\pi)C_\nu^\lambda(z)-C_\nu^\lambda(-z)}{Sin(\nu\pi)}\quad \nu\notin N\rightarrow Forme\ indéterminée\ \ \frac{0}{0}\quad Lorsque\ \nu=n$$

$$\frac{Cos(n\pi)C_\nu^\lambda(z)-C_\nu^\lambda(-z)}{Sin(\nu\pi)}\Rightarrow C_{(Q),n}^{\lambda}(z)=\lim_{\nu\to n\in N}\frac{\pi}{2}\frac{Cos(\nu\pi)C_\nu^\lambda(z)-C_\nu^\lambda(-z)}{Sin(\nu\pi)}$$

Calcul de la limite par la règle de l'Hôpital

$$C_{(Q),n}^{\lambda}(z)=\lim_{\nu\to n\in N}\frac{\pi}{2}\frac{\dfrac{\partial\left[Cos(\nu\pi)C_\nu^\lambda(z)-C_\nu^\lambda(-z)\right]}{\partial\nu}}{\dfrac{\partial Sin(\nu\pi)}{\partial\nu}}=\lim_{\nu\to n\in N}\frac{\pi}{2}\frac{Cos(\nu\pi)\dfrac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}-\pi\,Sin(\nu\pi)C_\nu^\lambda(z)-\dfrac{\partial C_\nu^\lambda(-z)}{\partial\nu}}{\pi\,Cos(\nu\pi)}$$

$$\Rightarrow C_{(Q),n}^{\lambda}(z)=\frac{1}{2}\frac{(-1)^n\dfrac{\partial C_n^\lambda(z)}{\partial\nu}-\dfrac{\partial C_n^\lambda(-z)}{\partial\nu}}{(-1)^n}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_n^\lambda(z)}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{\partial C_n^\lambda(-z)}{\partial\nu}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_{(Q),0}^{\lambda}(z)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial C_0^\lambda(z)}{\partial\nu}-\dfrac{\partial C_0^\lambda(-z)}{\partial\nu}\right)\\ C_{(Q),1}^{\lambda}(z)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial C_1^\lambda(z)}{\partial\nu}+\dfrac{\partial C_1^\lambda(-z)}{\partial\nu}\right)\end{cases}$$

Pour les ordres demi-entiers :

$$\frac{\partial C_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu} = C_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{R_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{(1+z)^p} \Rightarrow \frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(-z)}{\partial \nu} = (-1)^n C_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)Log\left[\frac{1-z}{2}\right] + \frac{R_n^{\frac{2p+1}{2}}(-z)}{(1-z)^p}$$

$$\Rightarrow C_{(Q),n}^{\frac{2p+1}{2}}(z) = \frac{1}{2}\left(C_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] + \frac{R_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{(1+z)^p} - (-1)^n \frac{R_n^{\frac{2p+1}{2}}(-z)}{(1-z)^p} \right)$$

Exemple pour p=0 :

$$C_{(Q),n}^{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2}\left(C_n^{\frac{1}{2}}(z)Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] + R_n^{\frac{1}{2}}(z) - (-1)^n R_n^{\frac{1}{2}}(-z) \right)$$

$$R_0^{\frac{1}{2}}(z) = 0 \Rightarrow C_{(Q),0}^{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] \quad R_1^{\frac{1}{2}}(z) = z-1 \Rightarrow C_{(Q),1}^{\frac{1}{2}}(z) = \frac{z}{2}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] + \frac{1}{2}\left((z-1)+(-z-1)\right)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),1}^{\frac{1}{2}}(z) = \frac{z}{2}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] - 1$$

$$\left.\begin{array}{l} R_2^{\frac{1}{2}}(z) = \frac{7z^2}{4} - \frac{3z}{2} - \frac{1}{4} \\ R_2^{\frac{1}{2}}(-z) = \frac{7z^2}{4} + \frac{3z}{2} - \frac{1}{4} \end{array}\right\} \quad C_{(Q),2}^{\frac{1}{2}}(z) = \frac{(3z^2-1)}{4}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] - \frac{3z}{2}$$

Exemple pour p=1 :

$$C_{(Q),n}^{\frac{3}{2}}(z) = \frac{1}{2}\left(C_n^{\frac{3}{2}}(z)Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] + \frac{R_n^{\frac{3}{2}}(z)}{1+z} - (-1)^n \frac{R_n^{\frac{3}{2}}(-z)}{1-z} \right)$$

$$C_0^{\frac{3}{2}}(z) = 1 \quad R_0^{\frac{3}{2}}(z) = 1+2z \Rightarrow C_{(Q),0}^{\frac{3}{2}}(z) = \frac{1}{2}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] + \frac{\left((1+2z)(1-z)-(1-2z)(1+z)\right)}{2(1-z^2)} = \frac{1}{2}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] + \frac{z}{1-z^2}$$

$$C_1^{\frac{3}{2}}(z) = 3z \quad R_1^{\frac{3}{2}}(z) = 5z^2+2z-2 \Rightarrow C_{(Q),1}^{\frac{3}{2}}(z) = \frac{3z}{2}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] - \frac{2-3z^2}{1-z^2}$$

$$C_2^{\frac{3}{2}}(z) = 3\frac{5z^2-1}{2} \quad R_2^{\frac{3}{2}}(z) = \frac{1}{4}\left(-5-31z+17z^2+47z^3\right) \Rightarrow C_{(Q),2}^{\frac{3}{2}}(z) = 3\frac{5z^2-1}{4}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] - \frac{z}{2}\left(\frac{13-15z^2}{1-z^2}\right)$$

Exemple pour p=2 :

$$C_{(Q),n}^{\frac{5}{2}}(z) = \frac{1}{2}\left(C_n^{\frac{5}{2}}(z)Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] + \frac{R_n^{\frac{5}{2}}(z)}{(1+z)^2} - (-1)^n \frac{R_n^{\frac{5}{2}}(-z)}{(1-z)^2} \right)$$

$$C_0^{\frac{5}{2}}(z) = 1 \quad R_0^{\frac{5}{2}}(z) = \frac{4+13z+8z^2}{3} \Rightarrow C_{(Q),0}^{\frac{5}{2}}(z) = \frac{1}{2}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] + \frac{z(5-3z^2)}{3(1-z^2)^2}$$

$$C_1^{\frac{5}{2}}(z) = 5z \quad R_1^{\frac{5}{2}}(z) = \frac{-8+7z+47z^2+31z^3}{3} \Rightarrow C_{(Q),1}^{\frac{5}{2}}(z) = \frac{5z}{2}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] + \frac{-8+25z^2-15z^4}{3(1-z^2)^2}$$

$$C_2^{\frac{5}{2}}(z) = \frac{5(-1+7z^2)}{2} \quad R_2^{\frac{5}{2}}(z) = \frac{-31-224z-18z^2+568z^3+389z^4}{12}$$

$$\Rightarrow C_{(Q),2}^{\frac{5}{2}}(z) = -\frac{5(1-7z^2)}{4}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] + z\frac{81-190z^2+105z^4}{6(1-z^2)^2}$$

<u>Table des nouveaux polynômes ultra-sphériques de Bromwich pour des ordres demi-entiers</u>

A partir de la récurrence :

$$(n+1)R_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)-(2p+1+2n)zR_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)+(2p+n)R_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)=(1+z)^p\left[-C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)+2zC_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)-C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)\right]$$

$$(n+1)C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)-(2p+1+2n)zC_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)+(2p+n)C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)=0$$

$$C_{-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)=0 \quad C_0^{\frac{2p+1}{2}}(z)=1$$

$$R_0^{\frac{2p+1}{2}}(z)=H_{2p}(1+z)^p-(p!)^2(1-z)\sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{(1+z)^l(1-z)^{p-1-l}}{(p-l)!l!(2p-l)!} \quad p>0 \quad R_0^{\frac{1}{2}}(z)=0$$

$$R_1^{\frac{2p+1}{2}}(z)=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z(1+z)^p\{H_{2p+1}-1\}-\\ -(1-z)\left[\begin{array}{l}\dfrac{(2p+1)(1+z)^p}{(2p+2)}+\dfrac{(p!)^2}{2(2p)!}(1-z)^p+\\ +(2p+1)p!(p+1)!\displaystyle\sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{(p-l+z(p+1))}{(l+1)!(p-l)!(2p+1-l)!}(1-z)^{p-1-l}(1+z)^l\end{array}\right]\end{array}\right\} \quad p>0 \quad R_1^{\frac{1}{2}}(z)=z-1$$

$$H_{2p} \ et \ H_{2p+1} \quad nombres \ harmoniques \quad H_n=\sum_{l'=1}^{l'=n}\frac{1}{l}$$

Les formules suivantes sont équivalentes :

$$C_{-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)=0 \quad C_0^{\frac{2p+1}{2}}(z)=1$$

$$C_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)=\frac{(2p-1+2n)zC_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)-(2p+n-1)C_{n-2}^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{n}$$

$$R_0^{\frac{2p+1}{2}}(z)=H_{2p}(1+z)^p-(p!)^2(1-z)\sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{(1+z)^l(1-z)^{p-1-l}}{(p-l)!l!(2p-l)!} \quad p>0 \quad R_0^{\frac{1}{2}}(z)=0$$

$$R_1^{\frac{2p+1}{2}}(z)=\left\{\begin{array}{l}(2p+1)z(1+z)^p\{H_{2p+1}-1\}-\\ -(1-z)\left[\begin{array}{l}\dfrac{(2p+1)(1+z)^p}{(2p+2)}+\dfrac{(p!)^2}{2(2p)!}(1-z)^p+\\ +(2p+1)p!(p+1)!\displaystyle\sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{(p-l+z(p+1))}{(l+1)!(p-l)!(2p+1-l)!}(1-z)^{p-1-l}(1+z)^l\end{array}\right]\end{array}\right\} \quad p>0 \quad R_1^{\frac{1}{2}}(z)=z-1$$

$$R_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)=\frac{(2p-1+2n)zR_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)-(2p+n-1)R_{n-2}^{\frac{2p+1}{2}}(z)+(1+z)^p\left[-C_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)+2zC_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)-C_{n-2}^{\frac{2p+1}{2}}(z)\right]}{n}$$

Problèmes aux limites de Laplace sur une hypersphère- p-

Ordre : λ=1/2, Degré	*Polynôme ultra-sphérique de Bromwich*
n=0	$R_0^{\frac{1}{2}}(z) = 0$
n=1	$R_1^{\frac{1}{2}}(z) = z - 1$
n=2	$R_2^{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{4}(z-1)(1+7z)$
n=3	$R_3^{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{12}(z-1)(-8+7z+37z^2)$
n=4	$R_4^{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{96}(z-1)(-21-241\,z+113\,z^2+533\,z^3)$
n=5	$R_4^{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{480}(z-1)(256-449\,z-3389\,z^2+1101\,z^3+4881\,z^4)$

Ordre : λ=3/2, Degré	*Polynôme ultra-sphérique de Bromwich*
n=0	$R_0^{\frac{3}{2}}(z) = 1 + 2z$
n=1	$R_1^{\frac{3}{2}}(z) = -2 + 2\,z + 5\,z^2$
n=2	$R_2^{\frac{3}{2}}(z) = \frac{1}{4}(-5-31\,z+17\,z^2+47\,z^3)$
n=3	$R_3^{\frac{3}{2}}(z) = \frac{1}{12}(32-61\,z-291\,z^2+109\,z^3+319\,z^4)$
n=4	$R_4^{\frac{3}{2}}(z) = \frac{1}{32}(47+499\,z-506\,z^2-2186\,z^3+619\,z^4+1879\,z^5)$
n=5	$R_4^{\frac{3}{2}}(z) = \frac{1}{160}(-512+1433\,z+10085\,z^2-7030\,z^3-28870\,z^4+6557\,z^5+20417\,z^6)$

Problèmes aux limites de Laplace sur une hypersphère- p-

Ordre : λ=5/2, Degré	*Polynôme ultra-sphérique de Bromwich*
n=0	$R_0^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{1}{3}\left(4+13\,z+8\,z^2\right)$
n=1	$R_1^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{1}{3}\left(-8+7\,z+47\,z^2+31\,z^3\right)$
n=2	$R_2^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{1}{12}\left(-31-224\,z-18\,z^2+568\,z^3+389\,z^4\right)$
n=3	$R_3^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{1}{12}\left(64-119\,z-988\,z^2-342\,z^3+1564\,z^4+1097\,z^5\right)$
n=4	$R_4^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{1}{96}\left(389+4454\,z-1781\,z^2-28428\,z^3-13285\,z^4+32518\,z^5+23189\,z^6\right)$
n=5	$R_4^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{1}{480}\left(-4096+11413z+118614z^2+5035z^3-454540z^4-243669z^5+406102z^6+293141z^7\right)$

Ordre : λ=7/2, Degré	*Polynôme ultra-sphérique de Bromwich*
n=0	$R_0^{\frac{7}{2}}(z)=\frac{1}{15}\left(23+102z+123z^2+46z^3\right)$
n=1	$R_1^{\frac{7}{2}}(z)=\frac{1}{15}\left(-48+32z+471z^2+636z^3+247z^4\right)$
n=2	$R_2^{\frac{7}{2}}(z)=\frac{1}{60}\left(-247-2067\,z-1446\,z^2+6334\,z^3+9873\,z^4+3921\,z^5\right)$
n=3	$R_3^{\frac{7}{2}}(z)=\frac{1}{60}\left(512-897z-11553z^2-12086z^3+17790z^4+33051z^5+13327z^6\right)$
n=4	$R_4^{\frac{7}{2}}(z)=\frac{1}{480}\left(3921+48943z+10581z^2-386565z^3-480925z^4+349437z^5+807351z^6+329177z^7\right)$
n=5	$R_4^{\frac{7}{2}}(z)=\frac{1}{480}\left(-8192+22335z+320337z^2+241499z^3-1364955z^4-1924467z^5+754691z^6+2313945z^7+951495z^8\right)$

Applications aux normes de fonctions propres de problèmes aux limites en physique mathématique

Pour des problèmes aux limites sur des hémisphères à N-dimensions, soit un cône ultra-sphérique d'angle d'ouverture droit ($\vartheta_0=\pi/2$), ce sont les polynômes de Gegenbauer de degré impair qui forme une base de fonctions propres. Par un calcul des normes des fonctions on a établit le résultat suivant sur la dérivée paramétrique comme départ de récurrence pour le calcul de toutes les autres dérivées paramétriques :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} \quad \forall\lambda \quad \textit{entier ou demi}-\textit{entier}$$

Les normes de telles fonctions propres peuvent justement être calculées à l'aide de la dérivée paramétrique à la valeur z=0. Au vu du résultat obtenu, que peut-on dire de ces dérivées paramétriques.

D'après la formule généralisée de Bromwich, nous avons :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = C_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{R_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{(1+z)^p} \quad avec \quad R_n^{\frac{2p+1}{2}}(z) \quad \textit{polynôme de degré } p+n$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\substack{\nu=2n+1\\ z=0}} = C_{2n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(0)Log\left[\frac{1}{2}\right] + R_{2n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(0) = R_{2n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(0)$$

Il suffit donc de calculer le terme constant du polynôme généralisée de Bromwich. Pour cela utilisons la formule de récurrence de ces polynômes à la valeur z=0. Il vient :

$$(n+1)R_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - (2p+1+2n)zR_n^{\frac{2p+1}{2}}(z) + (2p+n)R_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) = (1+z)^p\left[-C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) + 2zC_n^{\frac{2p+1}{2}}(z) - C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)\right]$$

$$\Leftrightarrow z=0 \Rightarrow (n+1)R_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(0) + (2p+n)R_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(0) = -\left[C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(0) + C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(0)\right]$$

$$n \to 2n \Rightarrow R_{2n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(0) = -\frac{2(p+n)}{(2n+1)}R_{2n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(0)$$

$$n \to 2n+1 \Rightarrow (2n+2)R_{2n+2}^{\frac{2p+1}{2}}(0) + (2p+2n+1)R_{2n}^{\frac{2p+1}{2}}(0) = -\left[C_{2n+2}^{\frac{2p+1}{2}}(0) + C_{2n}^{\frac{2p+1}{2}}(0)\right]$$

Pour la valeur en z=0, la dérivée paramétrique est donc constituée de deux jeux de valeurs, en relation exclusive soit entre les degrés impairs et les degrés pairs.

La relation de récurrence du calcul est donc assez simple, et il suffit de déterminer le premier terme de degré pair pour connaître les autres degrés pairs, comme suit (voir calcul précédent pour les polynômes R):

$$\textit{Calcul de } R_0^{\frac{2p+1}{2}}(0) \quad \textit{constitue un départ de la récurrence}$$

$$R_0^{\frac{2p+1}{2}}(0) = D_0^{\frac{2p+1}{2}}(0) = -(p!)^2\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{(p-k)k!(2p-k)!}$$

Pour les degrés impaires partons du premier terme de récurrence :

$$R_1^{\lambda}(0) = -\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} \quad \textit{constitue également un départ de récurrence}$$

.

Soit pour les ordres demi-entier :

$$\Gamma(2p+1) = \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)\Gamma(p+1) \Rightarrow \Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p}}\frac{\Gamma(2p+1)}{\Gamma(p+1)}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^{\lambda}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} \to \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -2^{2p}\,\frac{(p!)^2}{(2p)!}$$

et pour les ordres entiers (voir plus loin), il vient :

$$\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) = \frac{2^{-2p}\sqrt{\pi}(2p)!}{p!} \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{p}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)}{\Gamma(p)} = -\pi\,\frac{p(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

$$\textit{Soit} \quad \left.\frac{\partial C_\nu^{p}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\pi\,\frac{p(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \Rightarrow \begin{cases} p=1 \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{1}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\pi\,\frac{p(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = -\frac{\pi}{2} \\ p=2 \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{2}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\pi\,\frac{3!}{2^3} = -\frac{3\pi}{4} \\ p=3 \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^{3}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\pi\,\frac{3(6)!}{2^6(3!)^2} = -\frac{15\pi}{16} \end{cases}$$

Dérivées paramétriques des polynômes de Gegenbauer d'ordre entier

Passons maintenant à l'étude de la dérivée paramétrique pour les polynômes de Gegenbauer d'ordre entier. En commençant d'abord par le cas où λ=1 et ν=0 :

$$\lambda = 1 \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \{\psi(2\lambda) - \psi(1)\} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma(k+2)}{k\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right) = \left(\frac{1}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) \quad \Gamma(2k+1) = \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\Gamma(k+1) \Leftrightarrow \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2k+1)}{2^{2k}\Gamma(k+1)}$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right) = \left(\frac{1}{2}+k\right)\frac{\Gamma(2k+1)\sqrt{\pi}}{2^{2k}\Gamma(k+1)} \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2)}{k\,\Gamma(2k+2)}2^{2k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = 1 - \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k k!(k+1)!}{k(2k+1)!}(1-z)^k = 1 - \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k (k-1)!(k+1)!}{(2k+1)!}(1-z)^k = 1 - 2\sum_{k=1}^{k=\infty}2^k\frac{((k+1)!)^2}{k(2k+2)!}(1-z)^k$$

$$= 1 - \frac{1}{(1-z)}\sum_{l=2}^{k=\infty}2^l\frac{(l!)^2}{(l-1)(2l)!}(1-z)^l$$

Pour simplifier ce développement en série on va commencer par utiliser l'expression des polynômes de Gegenbauer d'ordre 1 à l'aide des fonctions associés de Legendre à savoir :

$$C_\nu^\lambda(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(z)\quad \lambda=1\Rightarrow\left\{C_\nu^1(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu+1)\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{4}}}P_{\nu+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(z)\right.$$

$$De\ plus\left\{\begin{array}{l}P_\nu^{-\mu}(z)=-\dfrac{\Gamma(-\nu-\mu)\Gamma(\nu-\mu+1)}{\pi}\left(Sin(\nu\pi)P_\nu^\mu(z)+Sin(\mu\pi)P_\nu^\mu(-z)\right)\\ P_\nu^{-\mu}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{Sin((\nu+\mu)\pi)\Gamma(\nu+\mu+1)}\left(Sin(\nu\pi)P_\nu^\mu(z)+Sin(\mu\pi)P_\nu^\mu(-z)\right)\end{array}\right.$$

$$Et\quad \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{Sin(\pi z)}\Rightarrow\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{\pi}{zSin(\pi z)}\Rightarrow\Gamma(-\nu-1)\Gamma(\nu+1)=\frac{\pi}{(\nu+1)Sin(\pi\nu)}$$

$$P_{\nu+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(z)=\frac{\left(Cos(\nu\pi)P_{\nu+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z)+P_{\nu+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(-z)\right)}{(\nu+1)Sin((\nu+1)\pi)}=-\frac{\left(Cos(\nu\pi)P_{\nu+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z)+P_{\nu+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(-z)\right)}{(\nu+1)Sin(\pi\nu)}\Rightarrow P_1^{-\frac{1}{2}}(z)=-\frac{2P_{\nu+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(-z)}{3}$$

$$De\ plus\ P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Cos\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)ArcCos(z)\right)}{\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{4}}}\Rightarrow P_{\nu+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Cos((\nu+1)ArcCos(z))}{\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$P_{\nu+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{4}}}\frac{(Cos(\nu\pi)Cos((\nu+1)Arcos(z))+Cos((\nu+1)ArcCos(-z)))}{(\nu+1)Sin(\pi\nu)}\quad ArcCos(-z)=\pi-ArcCos(z)$$

$$\Rightarrow C_\nu^1(z)=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu+1)}\frac{(Cos(\nu\pi)Cos((\nu+1)ArcCos(z))+Cos((\nu+1)ArcCos(-z)))}{(\nu+1)Sin(\pi\nu)}$$

$$\Rightarrow C_\nu^1(z)=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu+1)}\frac{(Cos(\nu\pi)Cos((\nu+1)ArcCos(z))+Cos((\nu+1)[\pi-ArcCos(z)]))}{(\nu+1)Sin(\pi\nu)}$$

$$\Rightarrow C_\nu^1(z)=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu+1)}\frac{Sin((\nu+1)ArcCos(z))}{(\nu+1)}=\frac{Sin((\nu+1)ArcCos(z))}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\Rightarrow C_\nu^1(z)=U_\nu(z)\quad avec\quad U_\nu(z)\quad polynômes/fonctions\ de\ Tchebycheff\ de\ deuxième\ espèce$$

.

L'expression est valable pour toute valeur de v réelle, on peut donc calculer directement la dérivée paramétrique de la fonction de Gegenbauer , comme suit :

$$C_\nu^1(z)=\frac{Sin((\nu+1)ArcCos(z))}{\sqrt{1-z^2}}\Rightarrow\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial\nu}=\frac{ArcCos(z)Cos((\nu+1)ArcCos(z))}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial\nu}=\frac{ArcCos(z)T_{\nu+1}(z)}{\sqrt{1-z^2}}\quad avec\quad T_\nu(z)\quad polynômes/fonctions\ de\ Tchebycheff\ de\ première\ espèce$$

Au passage cette expression respecte la relation de récurrence sur les degrés :

$$C_n^1(z)=2zC_{n-1}^1(z)-C_{n-2}^1(z)\quad C_n^1(z)=U_n(z)$$

$$\frac{\partial C_n^1(z)}{\partial\nu}=\frac{2nz\dfrac{\partial C_{n-1}^\lambda(z)}{\partial\nu}-n\dfrac{\partial C_{n-2}^\lambda(z)}{\partial\nu}-C_n^1(z)+2zC_{n-1}^1(z)-C_{n-2}^1(z)}{n}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial C_n^1(z)}{\partial\nu}=2z\frac{\partial C_{n-1}^\lambda(z)}{\partial\nu}-\frac{\partial C_{n-2}^\lambda(z)}{\partial\nu}$$

$$\frac{\partial C_n^1(z)}{\partial\nu}=T_{n+1}(z)\frac{ArcCos(z)}{\sqrt{1-z^2}}\quad Or\quad T_{n+1}(z)=2zT_n(z)-T_{n-1}(z)\quad c.q.f.d$$

L'expression obtenue donne pour v=0 et v=1 :

$$\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial \nu} = \frac{ArcCos(z)Cos((\nu+1)ArcCos(z))}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{zArcCos(z)}{\sqrt{1-z^2}} \quad \left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \frac{ArcCos(z)(2z^2-1)}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Lorsque z=0, il vient :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^1(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial C_\nu^1(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -ArcCos(0) = -\frac{\pi}{2}$$

Comparons avec la valeur de la dérivée paramétrique établie par le calcul des normes de fonctions propres :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^p(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\pi\frac{p(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \to p=1 \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^1(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\pi\frac{p(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Cette expression permet de rechercher le développement en série autour de z=1 de la fonction test, et l'on trouve une correspondance avec le développement en série obtenu :

$$\text{Développement en série} \quad f(z) = \frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}} = 1-\left(\frac{2}{3}(1-z)+\frac{1}{5}(1-z)^2+\frac{8}{105}(1-z)^3+\frac{2}{63}(1-z)^4\right)$$

$$f(x) = 1-\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k-1)!(k+1)!}{(2k+1)!}(1-z)^k \Rightarrow 1-\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k-1)!(k+1)!}{(2k+1)!}(1-z)^k = \frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^1(1)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = 0 \quad \left.\frac{\partial C_\nu^1(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = 0$$

Là encore il y a une relative simplification de la formule de la dérivée paramétrique.

Que se passe-t-il maintenant pour la valeur du paramètre λ=2 et ν=0 :

$$\left\{ \lambda = 2 \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \{\psi(2\lambda)-\psi(1)\} - \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\Gamma(2\lambda+k)}{k\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right.$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \{\psi(4)-\psi(1)\} - \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\Gamma(4+k)}{k\,\Gamma\left(\frac{5}{2}+k\right)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \qquad \{\psi(4)-\psi(1)\} = H_3 = \frac{11}{6}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{11}{6} - \frac{\sqrt{\pi}}{8} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\Gamma(k+4)}{k\,\Gamma\left(\frac{5}{2}+k\right)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \frac{11}{6} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2)(k+3)(k+2)}{k\,\Gamma(2k+2)(2k+3)} 2^{2k} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{11}{6} - \underbrace{\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2^k (k+1)!(k+3)!}{k(2k+3)!} (1-z)^k}_{l=k+1 \Leftrightarrow k=l-1} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2} \sum_{l=2}^{l=\infty} \frac{2^l\, l!(l+2)!}{(l-1)(2l+1)!} (1-z)^{l-1}$$

$$= \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}\right) \sum_{l=2}^{l=\infty} \frac{2^l\, l(l-2)!(l+2)!}{(2l+1)!} (1-z)^l = \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}\right) \sum_{l=2}^{l=\infty} \frac{2^l\, l(l+2)(l-1)!(l+1)!}{(l-1)(2l+1)!} (1-z)^l$$

$$= \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}\right) \sum_{l=2}^{l=\infty} \frac{l(l+2)}{(l-1)} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!} (1-z)^l$$

$$= \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}\right) \sum_{l=2}^{l=\infty} \left(l+3+\frac{3}{l-1}\right) 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!} (1-z)^l$$

$$Or \quad \sum_{l=1}^{l=\infty} 2^l\, l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!} (1-z)^l = (1-z)\frac{d}{dz}\left[\frac{z\, Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}\right] = -\frac{z}{1+z} + \frac{Arcos(z)}{(1+z)\sqrt{1-z^2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=2}^{l=\infty} 2^l\, l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!} (1-z)^l = -\frac{z}{1+z} + \frac{Arcos(z)}{(1+z)\sqrt{1-z^2}} - \frac{2}{3}(1-z)$$

$$et \quad \sum_{l=1}^{k=\infty} \frac{2^l (l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!} (1-z)^l = 1 - \frac{z\, Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow \sum_{l=2}^{l=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!} (1-z)^l = 1 - \frac{z\, Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{2}{3}(1-z)$$

$$l \geq 2 \quad \int_z^1 dz (1-z)^{l-2} = \left[-\frac{(1-z)^{l-1}}{l-1}\right]_z^1 = \frac{(1-z)^{l-1}}{l-1}$$

$$\sum_{l=2}^{l=\infty} 2^l \frac{1}{l-1} \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!} (1-z)^l = (1-z)\sum_{l=2}^{l=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!} \frac{(1-z)^{l-1}}{l-1} = (1-z)\sum_{l=2}^{l=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!} \int_z^1 dz(1-z)^{l-2}$$

$$= (1-z)\int_z^1 dz \left[\sum_{l=2}^{l=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!} (1-z)^{l-2}\right] = (1-z)\int_z^1 dz \frac{1}{(1-z)^2} \left[\sum_{l=2}^{l=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!} (1-z)^l\right]$$

$$= (1-z)\int_z^1 dz \left[-\frac{2}{3(1-z)} + \frac{1}{(1-z)^2} \sum_{l=1}^{l=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!} (1-z)^l\right] \quad \int dz \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)} \quad \int dz \frac{1}{(1-z)} = -Log(1-z)$$

$$\int dz \frac{z\, Arcos(z)}{(1-z)^2 \sqrt{1-z^2}} = \frac{2}{3} Log(1-z) + \frac{1}{3(1-z)} + \frac{Arcos(z)(2z-1)\sqrt{1-z^2}}{3(1-z)^2}$$

$$\Rightarrow \int dz \left[\frac{1}{(1-z)^2} - \frac{2}{3(1-z)} - \frac{z\, Arcos(z)}{(1-z)^2\sqrt{1-z^2}}\right] = \frac{2}{3(1-z)} - \frac{Arcos(z)(2z-1)\sqrt{1-z^2}}{3(1-z)^2}$$

.

Continuons, ce calcul fastidieux :

$$\Rightarrow \sum_{l=2}^{l=\infty} 2^l \frac{1}{l-1}\frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l = (1-z)\left[\frac{2}{3(1-z)} - \frac{Arcos(z)(2z-1)\sqrt{1-z^2}}{3(1-z)^2}\right]_z^1$$

$$Or \quad f(z) = \frac{2}{3(1-z)} - \frac{Arcos(z)(2z-1)\sqrt{1-z^2}}{3(1-z)^2} \qquad f(1) = \frac{13}{9}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=2}^{l=\infty} 2^l \frac{1}{l-1}\frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l = \left[\frac{13}{9}(1-z) - \frac{2}{3} + \frac{Arcos(z)(2z-1)\sqrt{1-z^2}}{3(1-z)}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{l=2}^{l=\infty} 2^l l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l = -\frac{z}{1+z} + \frac{Arcos(z)}{(1+z)\sqrt{1-z^2}} - \frac{2}{3}(1-z)$$

$$\Rightarrow \sum_{l=2}^{l=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l = 1 - \frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{2}{3}(1-z)$$

$$\Rightarrow \sum_{l=2}^{l=\infty}\left(l+3+\frac{3}{l-1}\right)2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l = -\frac{z}{1+z} + \frac{Arcos(z)}{(1+z)\sqrt{1-z^2}} - \frac{2}{3}(1-z) +$$

$$+3\left[1 - \frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{2}{3}(1-z)\right] + 3\left[\frac{13}{9}(1-z) - \frac{2}{3} + \frac{Arcos(z)(2z-1)\sqrt{1-z^2}}{3(1-z)}\right]$$

$$= \frac{1}{1+z} + \frac{5}{3}(1-z) + \frac{Arcos(z)(2z-1)\sqrt{1-z^2}}{(1-z)} + \frac{Arcos(z)}{(1+z)\sqrt{1-z^2}} - 3\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \frac{1}{1+z} + \frac{5}{3}(1-z) + \frac{Arcos(z)}{(1+z)\sqrt{1-z^2}}\left[(2z-1)(1+z)^2 + 1 - 3z(1+z)\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{l=2}^{l=\infty}\left(l+3+\frac{3}{l-1}\right)2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l = \frac{1}{1+z} + \frac{5}{3}(1-z) + \frac{z\,Arcos(z)}{(1+z)\sqrt{1-z^2}}\left[2z^2-3\right]$$

.

Le résultat est donc :

$$Comme \quad \left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}\right)\sum_{l=2}^{l=\infty}\left(l+3+\frac{3}{l-1}\right)2^{2l}\frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{5}{3} + \frac{z\,Arcos(z)(2z^2-3)}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{z\,Arcos(z)(2z^2-3)}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}\right) = \frac{1-2z^2}{2(1-z^2)} + \frac{3-2z^2}{2(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}z\,Arcos(z)$$

$$De\ plus \quad \left.\frac{\partial C_\nu^2(1)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{11}{6} \qquad \left.\frac{\partial C_\nu^2(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{1}{2}$$

.

Voyons si l'on peut exprimer également sous forme de fonctions connues la dérivée paramétrique de la fonction de Gegenbauer pour la valeur du paramètre λ=3 et n=0 :

$$\begin{cases} \lambda = 3 \\ \left.\dfrac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \{\psi(2\lambda) - \psi(1)\} - \dfrac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \dfrac{\Gamma(2\lambda + k)}{k\,\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2} + k\right)} \left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k \qquad H_5 = \dfrac{137}{60} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = H_5 - \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\Gamma(6+k)}{k\,\Gamma\left(\frac{7}{2}+k\right)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \frac{137}{60} - \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\Gamma(6+k)}{k\,\Gamma\left(\frac{7}{2}+k\right)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \Gamma(6) = 5! \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}+k\right) = \frac{1}{8}(2k+5)(2k+3)(2k+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2k+1)}{2^{2k}\Gamma(k+1)}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{137}{60} - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{k=\infty} 2^k \frac{\Gamma(6+k)\Gamma(k+1)}{k(2k+5)(2k+3)(2k+1)\Gamma(2k+1)} (1-z)^k$$

Continuons le calcul du développement en série :

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{137}{60} - -\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{k=\infty} 2^k \frac{\Gamma(6+k)\Gamma(k+1)}{k(2k+5)(2k+3)(2k+1)\Gamma(2k+1)}(1-z)^k$$

$$= \frac{137}{60} - -\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{k=\infty} 2^k \frac{(k+2)!(k+5)!}{k(2k+5)!}(1-z)^k}_{l=k+2 \Leftrightarrow k=l-2} = \frac{137}{60} - -\frac{1}{2}\sum_{l=3}^{l=\infty} 2^{l-2}\frac{l!(l+3)!}{(l-2)(2l+1)!}(1-z)^{l-2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{137}{60} - -\frac{1}{8}\sum_{l=3}^{l=\infty}\frac{l(l+2)(l+3)}{(l-2)} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-2}$$

$$\frac{l(l+2)(l+3)}{(l-2)} = Al^2 + Bl + C + \frac{D}{(l-2)} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 2C = 40 \\ C = 6 + 2B = 20 \\ B = 5 + 2A = 7 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{l(l+2)(l+3)}{(l-2)} = l^2 + 7l + 20 + \frac{40}{(l-2)} = l(l-1) + 8l + 20 + \frac{40}{(l-2)}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{137}{60} - \frac{1}{8}\sum_{l=3}^{l=\infty}\left[\ l(l-1) + 8l + 20 + \frac{40}{(l-2)}\right] 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{137}{60} - \frac{1}{8}\left[(1) + 8\times(2) + 20\times(3) + 40\times(4)\right]$$

$$Avec \quad \begin{cases} (1) \quad \sum_{l=3}^{l=\infty} l(l-1)2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-2} \\ (2) \quad \sum_{l=3}^{l=\infty} l\, 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-2} \\ (3) \quad \sum_{l=3}^{l=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-2} \\ (4) \quad \sum_{l=3}^{l=\infty} \frac{1}{(l-2)} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-2} \end{cases}$$

.

Calculons les nouvelles séries (1), (2), (3) et (4):

$$\sum_{l=3}^{l=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l = 1-\frac{2}{3}(1-z)-\frac{1}{5}(1-z)^2-\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$(1)\quad \sum_{l=3}^{l=\infty} l(l-1)2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-2} = \frac{d^2}{dz^2}\left[\sum_{l=3}^{l=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]$$

$$= \frac{d^2}{dz^2}\left[1-\frac{2}{3}(1-z)-\frac{1}{5}(1-z)^2-\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}\right] = \frac{8+9z^2-2z^4-15\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}}{5(1-z^2)^2}$$

$$(2)\quad \sum_{l=3}^{l=\infty} l\,2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-2} = -\frac{1}{(1-z)}\frac{d}{dz}\left[\sum_{l=3}^{k=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]$$

$$= -\frac{1}{(1-z)}\frac{d}{dz}\left[\left(1-\frac{2}{3}(1-z)-\frac{1}{5}(1-z)^2-\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}\right)\right] = -\frac{16(1-z^2)+9z+6z^3-15\frac{Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}}{15(1+z)(1-z)^2}$$

$$(3)\quad \sum_{l=3}^{l=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-2} = \frac{1}{(1-z)^2}\left[1-\frac{2}{3}(1-z)-\frac{1}{5}(1-z)^2-\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}\right]$$

$$(4)\quad \sum_{l=3}^{l=\infty} \frac{1}{(l-2)} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-2} = \sum_{l=3}^{l=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}\int_z^1 dz(1-z)^{l-3} = \int_z^1 dz\frac{1}{(1-z)^3}\left[\sum_{l=3}^{l=\infty} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]$$

$$= \int_z^1 dz\left[\frac{1}{(1-z)^3}-\frac{2}{3(1-z)^2}-\frac{1}{5(1-z)}-\frac{z\,Arcos(z)}{(1-z)^3\sqrt{1-z^2}}\right] = \int_z^1 dz\left[\frac{2+16z-3z^2}{15(1-z)^3}-\frac{z\,Arcos(z)}{(1-z)^3\sqrt{1-z^2}}\right]$$

$$Or\ \int dz\left[\frac{2+16z-3z^2}{15(1-z)^3}-\frac{z\,Arcos(z)}{(1-z)^3\sqrt{1-z^2}}\right] = \frac{-1+8z-7z^2+3(1-3z+z^2)\sqrt{1-z^2}\ Arcos(z)}{15(1-z)^3} = f(z)$$

$$De\ plus\ \lim_{z\to 1} f(z) = \frac{26}{75}$$

$$\Rightarrow \int_z^1 dz\left[\frac{2+16z-3z^2}{15(1-z)^3}-\frac{z\,Arcos(z)}{(1-z)^3\sqrt{1-z^2}}\right] = \frac{26}{75}-\frac{-1+8z-7z^2+3(1-3z+z^2)\sqrt{1-z^2}\ Arcos(z)}{15(1-z)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=3}^{l=\infty} \frac{1}{(l-2)} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-2} = \frac{26}{75}-\frac{-1+8z-7z^2+3(1-3z+z^2)\sqrt{1-z^2}\ Arcos(z)}{15(1-z)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=3}^{l=\infty} \frac{1}{(l-2)} 2^l \frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l} = \frac{26}{75}(1-z)^2-\frac{-1+8z-7z^2+3(1-3z+z^2)\sqrt{1-z^2}\ Arcos(z)}{15(1-z)}$$

Combinons les 4 expressions nous obtenons :

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{137}{60}-\frac{1}{8}\left[(1)+8\times(2)+20\times(3)+40\times(4)\right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{137}{60}+\frac{(-184+233z^2-94z^4)\sqrt{1-z^2}+15z(15-20z^2+8z^4)Arcos(z)}{120(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{3(2-7z^2+4z^4)}{8(1-z^2)^2}+\frac{z(15-20z^2+8z^4)Arcos(z)}{8(1-z^2)^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(1)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{137}{60} \qquad \left.\frac{\partial C_\nu^3(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{3}{4}$$

.

Résumons la situation sur les trois premières dérivées paramétriques des polynômes de Gegenbauer d'ordre 1,2 et 3 et de degré zéro :

$$\lambda = 1 \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{z\,Arcos(z)}{\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \lambda = 2 \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{1-2z^2}{2\left(1-z^2\right)} + \frac{3-2z^2}{2\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,z\,Arcos(z)$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{3\left(2-7z^2+4z^4\right)}{8\left(1-z^2\right)^2} + \frac{z\left(15-20z^2+8z^4\right)Arcos(z)}{8\left(1-z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Passons maintenant à l'étude de la dérivée paramétrique pour les polynômes de Gegenbauer d'ordre entier et de degré 1. Nous avons :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda\, z\{\psi(1+2\lambda)-\psi(2)\} - \\ -\dfrac{\Gamma(3+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)(1+2\lambda)^2}(1-z) + \dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^2 \displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\dfrac{\Gamma(3+2\lambda+l)}{(l+1)(l+2)\Gamma\left(\lambda+\frac{5}{2}+l\right)}\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^l\right] \end{array} \right\}$$

$$\psi(2+2\lambda-1)-\psi(2) = \sum_{l=0}^{2\lambda-2}\frac{1}{l+2} = \sum_{l=2}^{2\lambda}\frac{1}{l} = H_{2\lambda}-1$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda\, z\left(H_{2\lambda}-1\right) - \\ -\dfrac{\Gamma(3+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)(1+2\lambda)^2}(1-z) + \dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^2 \displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\dfrac{\Gamma(3+2\lambda+l)}{(l+1)(l+2)\Gamma\left(\lambda+\frac{5}{2}+l\right)}\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^l\right] \end{array} \right\}.$$

Commençons par λ=1 et ν=1, il vient :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\left\{2\lambda\, z(H_2-1)-\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(2)3^2}(1-z)+\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{\Gamma(5+l)}{(l+1)(l+2)\Gamma\left(\frac{7}{2}+l\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\right\}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}+l\right)=\left(\frac{5}{2}+l\right)\left(\frac{3}{2}+l\right)\left(\frac{1}{2}+l\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+l\right)=\frac{1}{8}(2l+5)(2l+3)(2l+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+l\right)\quad\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2l+1)}{2^{2l}\Gamma(l+1)}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\left\{z-\frac{8}{3}(1-z)+\sqrt{\pi}(1-z)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{\Gamma(5+l)}{(l+1)(l+2)(2l+5)(2l+3)(2l+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+l\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\left\{z-\frac{8}{3}(1-z)+(1-z)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{2^l\Gamma(l+1)\Gamma(l+5)(2l+2)(2l+4)}{(l+1)(l+2)(2l+5)(2l+4)(2l+3)(2l+2)\Gamma(2l+2)}(1-z)^l\right]\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\left\{z-\frac{8}{3}(1-z)+4(1-z)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{2^l\Gamma(l+1)\Gamma(l+5)}{\Gamma(2l+6)}(1-z)^l\right\}=\left\{z-\frac{8}{3}(1-z)+4(1-z)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{2^l\, l!(l+4)!}{(2l+5)!}(1-z)^l\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\left\{z-\frac{8}{3}(1-z)+\sum_{l=2}^{l=\infty}\frac{2^l(l-2)!(l+2)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right\}=\left\{z-\frac{8}{3}(1-z)+\sum_{l=2}^{l=\infty}\frac{(l+2)}{(l-1)}\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\left\{z-\frac{8}{3}(1-z)+\sum_{l=2}^{l=\infty}\left(1+\frac{3}{l-1}\right)\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right\}$$

.

Les séries ont déjà été calculées :

$$\sum_{l=2}^{l=\infty}2^l\frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l=1-\frac{2}{3}(1-z)-\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\sum_{l=2}^{l=\infty}2^l\frac{1}{l-1}\frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l=\left[\frac{13}{9}(1-z)-\frac{2}{3}+\frac{Arcos(z)(2z-1)\sqrt{1-z^2}}{3(1-z)}\right]$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\left\{z-\frac{8}{3}(1-z)+\sum_{l=2}^{l=\infty}\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l+3\sum_{l=2}^{l=\infty}\frac{1}{l-1}\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\left\{z-\frac{8}{3}(1-z)+1-\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}-\frac{2}{3}(1-z)+3\left[\frac{13}{9}(1-z)-\frac{2}{3}+\frac{Arcos(z)(2z-1)\sqrt{1-z^2}}{3(1-z)}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}\left(1-2z^2\right)\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^1(1)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=1\qquad\left.\frac{\partial C_\nu^1(0)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{\pi}{2}$$

Voyons ce que cela donne pour λ=2 et ν=1 :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{4\,z\left(H_4-1\right)-\frac{\Gamma(7)}{25\Gamma(4)}(1-z)+\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{\Gamma(l+7)}{(l+1)(l+2)\Gamma\left(l+\frac{9}{2}\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{\frac{13z}{3}-\frac{24}{5}(1-z)+\frac{\sqrt{\pi}}{2^5}(1-z)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{\Gamma(l+7)}{(l+1)(l+2)\left(l+\frac{7}{2}\right)\left(l+\frac{5}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right)\left(l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{\frac{13z}{3}-\frac{24}{5}(1-z)+\frac{2^4}{2^5}(1-z)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{2^l\Gamma(l+1)\Gamma(l+7)(2l+2)(2l+4)(2l+6)}{(l+1)(l+2)\Gamma(2l+8)}(1-z)^l\right]\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{\frac{13z}{3}-\frac{24}{5}(1-z)+\frac{2^7}{2^5}(1-z)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{2^l(l+1)(l+2)(l+3)\Gamma(l+1)\Gamma(l+7)}{(l+1)(l+2)\Gamma(2l+8)}(1-z)^l\right]\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{\frac{13z}{3}-\frac{24}{5}(1-z)+\frac{1}{2(1-z)}\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{2^{l+3}(l+3)!(l+6)!}{(l+1)(l+2)(2l+7)!}(1-z)^{l+3}\right]\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{\frac{13z}{3}-\frac{24}{5}(1-z)+\frac{1}{2(1-z)}\sum_{l=3}^{l=\infty}\left[\frac{2^l(l)!(l+3)!}{(l-2)(l-1)(2l+1)!}(1-z)^l\right]\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{\frac{13z}{3}-\frac{24}{5}(1-z)+\frac{1}{2(1-z)}\sum_{l=3}^{l=\infty}\left[\frac{l(l+2)(l+3)}{(l-2)(l-1)}\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{\frac{13z}{3}-\frac{24}{5}(1-z)+\frac{1}{2(1-z)}\sum_{l=3}^{l=\infty}\left[\left(l+8+\frac{40}{l-2}-\frac{12}{l-1}\right)\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]\right\}$$

Les séries ont déjà été calculées auparavant, il vient le résultat suivant :

$$(1)\quad \sum_{l=3}^{l=\infty}\left[l\,\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]=-\frac{16(1-z^2)+9z+6z^3-15\dfrac{Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}}{15(1+z)}$$

$$(2)\quad \sum_{l=3}^{l=\infty}\left[\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]=1-\frac{2}{3}(1-z)-\frac{1}{5}(1-z)^2-\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$(3)\quad \sum_{l=3}^{l=\infty}\left[\frac{1}{l-2}\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]=\frac{26}{75}(1-z)^2-\frac{-1+8z-7z^2+3(1-3z+z^2)\sqrt{1-z^2}\,Arcos(z)}{15(1-z)}$$

$$(4)\quad \sum_{l=3}^{l=\infty}\left[\frac{1}{l-1}\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]=\frac{13}{9}(1-z)-\frac{2}{3}+\frac{Arcos(z)(2z-1)\sqrt{1-z^2}}{3(1-z)}-\frac{1}{5}(1-z)^2$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\left\{\frac{13z}{3}-\frac{24}{5}(1-z)+\frac{1}{2(1-z)}\left[(1)+8\times(2)+40\times(3)-12\times(4)\right]\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\frac{13z}{3}-\frac{z(17-14z^2)}{6(1-z^2)}-\frac{(3-12z^2+8z^4)}{2(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}Arcos(z)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\frac{z(3-4z^2)}{2(1-z^2)}-\frac{(3-12z^2+8z^4)}{2(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}Arcos(z)\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^2(1)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\frac{13}{3}\quad \left.\frac{\partial C_\nu^2(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{3\pi}{4}$$

Voyons ce que cela donne pour λ=3 et ν=1 :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{ 2\lambda\, z\left(H_{2\lambda}-1\right) - \frac{\Gamma(3+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)(1+2\lambda)^2}(1-z) + \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{\Gamma(3+2\lambda+l)}{(l+1)(l+2)\Gamma\left(\lambda+\frac{5}{2}+l\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\right\}$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{ 3z\frac{29}{10} - \frac{48}{7}(1-z) + \frac{\sqrt{\pi}}{2^6}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{\Gamma(l+9)}{(l+1)(l+2)\Gamma\left(l+\frac{11}{2}\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{ \frac{87z}{10} - \frac{48}{7}(1-z) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{2^l\,\Gamma(l+1)\Gamma(l+9)}{(l+1)(l+2)(2l+9)(2l+7)(2l+5)(2l+3)(2l+1)\Gamma(2l+1)}(1-z)^l\right]\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{ \frac{87z}{10} - \frac{48}{7}(1-z) + \frac{2^4}{2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{2^l\,\Gamma(l+5)\Gamma(l+9)}{(l+1)(l+2)\Gamma(2l+10)}(1-z)^l\right]\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{ \frac{87z}{10} - \frac{48}{7}(1-z) + \frac{1}{2^3(1-z)^2} \sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{2^{l+4}(l+4)!(l+8)!}{(l+1)(l+2)(2l+9)!}(1-z)^{l+4}\right]\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{ \frac{87z}{10} - \frac{48}{7}(1-z) + \frac{1}{2^3(1-z)^2} \sum_{l=4}^{l=\infty}\left[\frac{l(l+4)(l+3)(l+2)}{(l-3)(l-2)}\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]\right\}$$

$$Or \quad \frac{l(l+4)(l+3)(l+2)}{(l-3)(l-2)} = Al(l-1) + Bl + C + \frac{D}{l-3} + \frac{E}{l-2}$$

$$\Leftrightarrow A=1 \quad B=15 \quad C=90 \quad D=630 \quad E=-240$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \left\{ \frac{87z}{10} - \frac{48}{7}(1-z) + \frac{1}{2^3(1-z)^2} \sum_{l=4}^{l=\infty}\left[\left[l(l-1) + 15l + 90 + \frac{630}{l-3} - \frac{240}{l-2}\right]\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]\right\}$$

Il y a donc 5 séries à calculer :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=\left\{\frac{87z}{10}-\frac{48}{7}(1-z)+(1)+15\times(2)+90\times(3)+630\times(4)-240\times(5)\right\}$$

$$On\ a\quad \sum_{l=4}^{l=\infty}\left[\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]=\left\{1-\frac{2}{3}(1-z)-\frac{1}{5}(1-z)^2-\frac{8}{105}(1-z)^3-\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}\right\}$$

$$(1)=\frac{1}{2^3}\sum_{l=4}^{l=\infty}\left[[l(l-1)]\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-2}\right]=\frac{1}{2^3}\frac{d^2}{dz^2}\left\{1-\frac{2}{3}(1-z)-\frac{1}{5}(1-z)^2-\frac{8}{105}(1-z)^3-\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}\right\}$$

$$(2)=\frac{1}{2^3(1-z)}\sum_{l=4}^{l=\infty}\left[l\,\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-1}\right]=-\frac{1}{2^3}\frac{d}{dz}\left\{1-\frac{2}{3}(1-z)-\frac{1}{5}(1-z)^2-\frac{8}{105}(1-z)^3-\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}\right\}$$

$$(3)=\frac{1}{2^3(1-z)^2}\sum_{l=4}^{l=\infty}\left[\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]=\frac{1}{2^3(1-z)^2}\left\{1-\frac{2}{3}(1-z)-\frac{1}{5}(1-z)^2-\frac{8}{105}(1-z)^3-\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}\right\}$$

$$(4)=\frac{1}{2^3(1-z)^2}\sum_{l=4}^{l=\infty}\left[\frac{1}{l-3}\,\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]=\frac{(1-z)}{2^3}\sum_{l=4}^{l=\infty}\left[\frac{1}{l-3}\,\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-3}\right]$$

$$\Rightarrow(4)=\frac{(1-z)}{2^3}\sum_{l=4}^{l=\infty}\left[\frac{1}{l-3}\,\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^{l-3}\right]=\frac{(1-z)}{2^3}\sum_{l=4}^{l=\infty}2^l\,\frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}\int_z^1 dz(1-z)^{l-4}$$

$$=\frac{(1-z)}{2^3}\int_z^1 dz\frac{1}{(1-z)^4}\left[\sum_{l=4}^{l=\infty}2^l\,\frac{(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]=$$

$$=\frac{(1-z)}{2^3}\int_z^1 dz\frac{1}{(1-z)^4}\left[1-\frac{2}{3}(1-z)-\frac{1}{5}(1-z)^2-\frac{8}{105}(1-z)^3-\frac{z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}\right]$$

$$(5)=\frac{1}{2^3(1-z)^2}\sum_{l=4}^{l=\infty}\left[\frac{1}{l-2}\,\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]=\frac{1}{2^3(1-z)^2}\left\{-\frac{8}{105}(1-z)^3+\sum_{l=3}^{l=\infty}\left[\frac{1}{l-2}\,\frac{2^l(l-1)!(l+1)!}{(2l+1)!}(1-z)^l\right]\right\}$$

$$\Rightarrow(5)=\frac{1}{2^3(1-z)^2}\left\{-\frac{8}{105}(1-z)^3+\frac{26}{75}(1-z)^2-\frac{-1+8z-7z^2+3(1-3z+z^2)\sqrt{1-z^2}\,Arcos(z)}{15(1-z)}\right\}$$

A l'aide de Mathematica et d'un peu de calculs en plus, il vient l'expression :

$$(1)=\frac{\left(40+16z+95z^2-32z^3-30z^4+16z^5\right)\sqrt{1-z^2}-105\,z\,Arcos(z)}{280\left(1-z^2\right)^{5/2}}$$

$$(2)=\frac{-136-15z+112z^2-90z^3+24z^4+\dfrac{105\,z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}}{840\left(1-z^2\right)(1-z)}$$

$$(3)=\frac{6+136z-45z^2+8z^3-\dfrac{105\,z\,Arcos(z)}{\sqrt{1-z^2}}}{840(1-z)^2}$$

$$(4)=\frac{(1-z)}{8}\left\{\frac{1346}{11025}+\frac{12\text{-}67\,z+68\,z^2\text{-}13\,z^3+\left(\text{-}13+52\,z\text{-}32\,z^2+8\,z^3\right)\sqrt{1-z^2}\,Arcos(z)}{105\,(1-z)^4}\right\}$$

$$(5)=-\frac{-177+666\,z-551\,z^2+22\,z^3+40\,z^4+105\sqrt{1-z^2}\left(1-3\,z+z^2\right)Arcos(z)}{4200\,(1-z)^3}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\frac{87z}{10}+\frac{\left(-203+336\,z^2-148\,z^4\right)z\sqrt{1-z^2}+15\left(-5+30\,z^2-40\,z^4+16\,z^6\right)Arcos(z)}{40\,(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\frac{\left(29-72z^2+40z^4\right)z\sqrt{1-z^2}+3\left(-5+30\,z^2-40\,z^4+16\,z^6\right)Arcos(z)}{8\,(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial C_\nu^3(1)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\frac{87}{10}\qquad\left.\frac{\partial C_\nu^3(0)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{15\pi}{16}$$

Récapitulons pour les trois valeurs d'ordre λ et de degré 0 et 1 :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=\frac{z\,Arcos(z)}{\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\qquad\left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=\frac{1-2z^2}{2\left(1-z^2\right)}+\frac{3-2z^2}{2\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}}z\,Arcos(z)$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=\frac{3\left(2-7z^2+4z^4\right)}{8\left(1-z^2\right)^2}+\frac{z\left(15-20z^2+8z^4\right)Arcos(z)}{8\left(1-z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\frac{\left(2z^2-1\right)}{\sqrt{1-z^2}}Arcos(z)\qquad\left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\frac{z\left(3-4z^2\right)}{2\left(1-z^2\right)}-\frac{\left(3-12z^2+8z^4\right)}{2\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}}Arcos(z)$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=\frac{\left(29-72z^2+40z^4\right)z\sqrt{1-z^2}+3\left(-5+30\,z^2-40\,z^4+16\,z^6\right)Arcos(z)}{8\,(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

.

Pour les valeurs des dérivées paramétriques de degré en z=0, il vient :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^1(0)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{\pi}{2}\qquad\left.\frac{\partial C_\nu^2(0)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{3\pi}{4}\qquad\left.\frac{\partial C_\nu^3(0)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{15\pi}{16}$$

valeurs coïncidant avec $\left.\frac{\partial C_\nu^p(0)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}=-\pi\,\frac{p(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$ *pour* $p=1,2,3$

.

<u>Application au calcul des fonctions de Gegenbauer de deuxième espèce de degré entier et d'ordre entier</u>

A partir des formules établies précédemment pour le calcul des fonctions de Gegenbauer de deuxième espèce de degré entier

$$C^{\lambda}_{(Q),n}(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C^{\lambda}_{n}(z)}{\partial\nu}-(-1)^{n}\frac{\partial C^{\lambda}_{n}(-z)}{\partial\nu}\right)\Rightarrow\begin{cases}C^{\lambda}_{(Q),0}(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C^{\lambda}_{0}(z)}{\partial\nu}-\frac{\partial C^{\lambda}_{0}(-z)}{\partial\nu}\right)\\ C^{\lambda}_{(Q),1}(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C^{\lambda}_{1}(z)}{\partial\nu}+\frac{\partial C^{\lambda}_{1}(-z)}{\partial\nu}\right)\end{cases}$$

Tout d'abord rappelons une des expressions de la dérivée paramétrique pour l'ordre 1 et tous les degré entiers :

$$\left.\frac{\partial C^{1}_{\nu}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\frac{ArcCos(z)Cos((n+1)ArcCos(z))}{\sqrt{1-z^{2}}}$$

On en déduit la valeur de la fonction de Gegenbauer de deuxième espèce d'ordre 1 et de degré n :

$$C^{1}_{(Q),n}(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C^{1}_{n}(z)}{\partial\nu}-(-1)^{n}\frac{\partial C^{1}_{n}(-z)}{\partial\nu}\right)$$

$$\Rightarrow C^{1}_{(Q),n}(z)=\frac{1}{2\sqrt{1-z^{2}}}\left(ArcCos(z)Cos((n+1)ArcCos(z))-(-1)^{n}ArcCos(-z)Cos((n+1)ArcCos(-z))\right)$$

$$ArcCos(-z)=\pi-ArcCos(z)$$

$$C^{1}_{(Q),n}(z)=\frac{1}{2\sqrt{1-z^{2}}}\begin{pmatrix}ArcCos(z)Cos((n+1)ArcCos(z))-\\-(-1)^{n}(\pi-ArcCos(z))Cos((n+1)[\pi-ArcCos(z)])\end{pmatrix}$$

$$Or\quad Cos((n+1)[\pi-ArcCos(z)])=Cos((n+1)\pi)Cos((n+1)ArcCos(z))+Sin((n+1)\pi)Sin((n+1)ArcCos(z))$$

$$\Rightarrow Cos((n+1)[\pi-ArcCos(z)])=(-1)^{n+1}Cos((n+1)ArcCos(z))$$

$$C^{1}_{(Q),n}(z)=\frac{1}{2\sqrt{1-z^{2}}}\begin{pmatrix}ArcCos(z)Cos((n+1)ArcCos(z))-\\-(-1)^{n}(\pi-ArcCos(z))(-1)^{n+1}Cos((n+1)ArcCos(z))\end{pmatrix}$$

$$C^{1}_{(Q),n}(z)=\frac{1}{2\sqrt{1-z^{2}}}\begin{pmatrix}ArcCos(z)Cos((n+1)ArcCos(z))+\\+(\pi-ArcCos(z))Cos((n+1)ArcCos(z))\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{1}_{(Q),n}(z)=\frac{\pi\,Cos((n+1)ArcCos(z))}{2\sqrt{1-z^{2}}}$$

$$\Rightarrow C^{1}_{(Q),n}(z)=\frac{\pi\,T_{n+1}(z)}{2\sqrt{1-z^{2}}}\quad avec\quad T_{n}(z)\quad polynômes/\,fonctions\ de\ Tchebycheff\ de\ première\ espèce$$

Il vient par exemple pour n=0 et λ=1 :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{z\,Arcos(z)}{\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow C^1_{(Q),0}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_0^1(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial C_0^1(-z)}{\partial \nu}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{z}{\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{1-2z^2}{2\left(1-z^2\right)} + \frac{3-2z^2}{2\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, z\,Arcos(z) \Rightarrow C^2_{(Q),0}(z) = \frac{\pi}{4}\frac{z\left(3-2z^2\right)}{\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{3\left(2-7z^2+4z^4\right)}{8\left(1-z^2\right)^2} + \frac{z\left(15-20z^2+8z^4\right)Arcos(z)}{8\left(1-z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow C^3_{(Q),0}(z) = \frac{\pi}{16}\frac{z\left(15-20z^2+8z^4\right)}{\left(1-z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \frac{\left(2z^2-1\right)}{\sqrt{1-z^2}}Arcos(z) \Rightarrow C^1_{(Q),1}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_1^1(z)}{\partial \nu} + \frac{\partial C_1^1(-z)}{\partial \nu}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{\left(2z^2-1\right)}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \frac{z\left(3-4z^2\right)}{2\left(1-z^2\right)} - \frac{\left(3-12z^2+8z^4\right)}{2\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}}Arcos(z) \Rightarrow C^2_{(Q),1}(z) = -\frac{\pi}{4}\frac{\left(3-12z^2+8z^4\right)}{\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \frac{\left(29-72z^2+40z^4\right)z\sqrt{1-z^2} + 3\left(-5+30\,z^2-40\,z^4+16\,z^6\right)Arcos(z)}{8\,(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\Rightarrow C^2_{(Q),2}(z) = \frac{3\pi}{16}\frac{\left(-5+30\,z^2-40\,z^4+16\,z^6\right)}{\left(1-z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Récurrence des dérivées paramétriques des polynômes de Gegenbauer sur les ordres entiers ou demi-entiers

Les polynômes de Gegenbauer présentent la récurrence en ordre entier ou demi-entier suivante :

$$C_\nu^\lambda(z) = \frac{\left[2\lambda\left(2\lambda+1-2\left(z^2-1\right)\left(\lambda+\nu+1\right)\right)C_\nu^{\lambda+1}(z) + 4\lambda\left(\lambda+1\right)\left(z^2-1\right)C_\nu^{\lambda+2}(z)\right]}{\left(2\lambda+\nu\right)\left(2\lambda+\nu+1\right)}$$

$$\Rightarrow C_\nu^{\lambda+2}(z) = \frac{-2\lambda\left(2\lambda+1-2\left(z^2-1\right)\left(\lambda+\nu+1\right)\right)C_\nu^{\lambda+1}(z) + \left(2\lambda+\nu\right)\left(2\lambda+\nu+1\right)C_\nu^\lambda(z)}{4\lambda\left(\lambda+1\right)\left(z^2-1\right)} \Rightarrow \lambda \to \lambda-2$$

$$\Rightarrow C_\nu^\lambda(z) = \frac{-2\left(\lambda-2\right)\left(2\lambda-3-2\left(z^2-1\right)\left(\lambda-1+\nu\right)\right)C_\nu^{\lambda-1}(z) + \left(2\lambda-4+\nu\right)\left(2\lambda-3+\nu\right)C_\nu^{\lambda-2}(z)}{4\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-1\right)\left(z^2-1\right)}$$

$$\Rightarrow C_\nu^\lambda(z) = \frac{-\left(2\lambda-3-2\left(z^2-1\right)\left(\lambda-1+\nu\right)\right)}{2\left(\lambda-1\right)\left(z^2-1\right)}C_\nu^{\lambda-1}(z) + \frac{\left(2\lambda-4+\nu\right)\left(2\lambda-3+\nu\right)}{4\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-1\right)\left(z^2-1\right)}C_\nu^{\lambda-2}(z)$$

$$\Rightarrow C_\nu^\lambda(z) = \frac{1}{2\left(\lambda-1\right)}\left\{\frac{2\left(\lambda-1\right)z^2+2\nu\left(z^2-1\right)-4\lambda+5}{\left(z^2-1\right)}C_\nu^{\lambda-1}(z) + \frac{\left(\nu+2\lambda-4\right)\left(\nu+2\lambda-3\right)}{2\left(z^2-1\right)\left(\lambda-2\right)}C_\nu^{\lambda-2}(z)\right\}$$

Récurrence sur les polynômes de Gegenbauer vrai pour $\nu = 0$

$$\Rightarrow C_0^\lambda(z) = \frac{1}{2\left(z^2-1\right)\left(\lambda-1\right)}\left(\left(2\left(\lambda-1\right)z^2-4\lambda+5\right)C_0^{\lambda-1}(z) + \left(2\lambda-3\right)C_0^{\lambda-2}(z)\right)$$

$$\Rightarrow C_0^{\lambda-1}(z) = 1 \quad C_0^{\lambda-2}(z) = 1 \Rightarrow C_0^\lambda(z) = \frac{2\left(\lambda-1\right)\left(z^2-1\right)}{2\left(z^2-1\right)\left(\lambda-1\right)} = 1$$

.

Ceci permet de générer une récurrence sur les dérivées premières paramétriques :

$$\textit{Récurrence sur les dérivées premières paramétriques de Gegenbauer d'ordre entier} \quad \lambda \in \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu} = \frac{1}{2(\lambda-1)}\left\{\begin{array}{l} \frac{2(\lambda-1)z^2+2\nu(z^2-1)-4\lambda+5}{(z^2-1)}\frac{\partial C_\nu^{\lambda-1}(z)}{\partial \nu} + \frac{(\nu+2\lambda-4)(\nu+2\lambda-3)}{2(z^2-1)(\lambda-2)}\frac{\partial C_\nu^{\lambda-2}(z)}{\partial \nu} + \\ + 2C_\nu^{\lambda-1}(z) + \frac{(2\nu+4\lambda-7)}{2(z^2-1)(\lambda-2)}C_\nu^{\lambda-2}(z) \end{array}\right\}$$

$$\textit{Récurrence sur les dérivées premières paramétriques de Gegenbauer d'ordre demi-entier} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z) = \frac{1}{(2p-1)}\left\{\frac{(2p-1)z^2+2\nu(z^2-1)-4p+3}{(z^2-1)}C_\nu^{\frac{2p-1}{2}}(z) + \frac{(\nu+2p-3)(\nu+2p-2)}{(z^2-1)(2p-3)}C_\nu^{\frac{2p-3}{2}}(z)\right\} \\ \frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu} = \frac{1}{(2p-1)}\left\{\begin{array}{l} \frac{(2p-1)z^2+2\nu(z^2-1)-4p+3}{(z^2-1)}\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p-1}{2}}(z)}{\partial \nu} + \frac{(\nu+2p-3)(\nu+2p-2)}{(z^2-1)(2p-3)}\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p-3}{2}}(z)}{\partial \nu} + \\ + 2C_\nu^{\frac{2p-1}{2}}(z) + \frac{(2\nu+4p-5)}{(z^2-1)(2p-3)}C_\nu^{\frac{2p-3}{2}}(z) \end{array}\right\} \end{array}\right.$$

Partons de p=0 et p=1, il vient pour un degré 0 :

$$\left.\begin{array}{l} p=2 \\ \nu=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial C_0^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu} = \frac{3z^2-5}{3(z^2-1)}\frac{\partial C_0^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu} + \frac{2}{3(z^2-1)}\frac{\partial C_0^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu} + \frac{2}{3} + \frac{1}{(z^2-1)} \qquad C_0^{\frac{1}{2}}(z) = C_0^{\frac{3}{2}}(z) = 1$$

$$Comme\ \frac{\partial C_0^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu} = Log\left[\frac{1+z}{2}\right] \qquad \frac{\partial C_0^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu} = Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{(1+2z)}{(1+z)}$$

$$\frac{\partial C_0^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu} = \frac{3z^2-5}{3(z^2-1)}\left[Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{(1+2z)}{(1+z)}\right] + \frac{2}{3(z^2-1)}Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{2}{3} + \frac{1}{(z^2-1)}$$

$$\frac{\partial C_0^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu} = Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{2}{3} + \frac{1}{3(z^2-1)}\left\{3 + \frac{(1+2z)}{(1+z)}(3z^2-5)\right\}$$

$$\frac{\partial C_0^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu} = Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{2}{3} + \frac{\{2+9z+6z^2\}}{3(1+z)^2} \Rightarrow \frac{\partial C_0^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu} = Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{\{4+13z+8z^2\}}{3(1+z)^2}$$

C'est bien l'expression de la dérivée de degré 0 à l'ordre 5/2.

Partons également de p=0 et p=1, il vient pour un degré 1 :

$$\left.\begin{array}{l}p=2\\ \nu=1\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\partial C_1^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial\nu}=\frac{3z^2+2\left(z^2-1\right)-5}{3\left(z^2-1\right)}\frac{\partial C_1^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial\nu}+\frac{6}{3\left(z^2-1\right)}\frac{\partial C_1^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial\nu}+\frac{2}{3}C_1^{\frac{3}{2}}(z)+\frac{5}{3\left(z^2-1\right)}C_1^{\frac{1}{2}}(z)$$

$$Comme\ C_1^{\frac{1}{2}}(z)=z\quad C_1^{\frac{3}{2}}(z)=3z\quad \frac{\partial C_1^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial\nu}=zLog\left(\frac{1+z}{2}\right)+z-1\quad \frac{\partial C_1^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial\nu}=3zLog\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{5z^2+2z-2}{\left(1+z\right)}$$

$$\frac{\partial C_1^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial\nu}=\frac{3z^2+2\left(z^2-1\right)-5}{3\left(z^2-1\right)}\left[3zLog\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{5z^2+2z-2}{\left(1+z\right)}\right]+$$

$$+\frac{6}{3\left(z^2-1\right)}\left[zLog\left(\frac{1+z}{2}\right)+z-1\right]+2z+\frac{5z}{3\left(z^2-1\right)}$$

$$\frac{\partial C_1^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial\nu}=\left\{z\frac{15z^2-21}{3\left(z^2-1\right)}+\frac{6z}{3\left(z^2-1\right)}\right\}Log\left[\frac{1+z}{2}\right]+\left\{\begin{array}{l}\frac{5z^2-7}{3\left(z^2-1\right)}\times\frac{5z^2+2z-2}{\left(1+z\right)}+\\ +\frac{2}{\left(1+z\right)}+2z+\frac{5z}{3\left(z^2-1\right)}\end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial C_1^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial\nu}=5zLog\left[\frac{1+z}{2}\right]+\frac{1}{3\left(1+z\right)^2}\left(-8+7z+47z^2+31z^3\right)$$

Ce qui est bien l'expression de la dérivée paramétrique pour le degré 1 et l'ordre 5/2.

La relation de récurrence pour les ordres entiers est la suivante :

$$C_\nu^\lambda(z)=\frac{1}{2\left(\lambda-1\right)}\left\{\frac{2\left(\lambda-1\right)z^2+2\nu\left(z^2-1\right)-4\lambda+5}{\left(z^2-1\right)}C_\nu^{\lambda-1}(z)+\frac{\left(\nu+2\lambda-4\right)\left(\nu+2\lambda-3\right)}{2\left(z^2-1\right)\left(\lambda-2\right)}C_\nu^{\lambda-2}(z)\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}=\frac{1}{2\left(\lambda-1\right)}\left\{\begin{array}{l}\frac{2\left(\lambda-1\right)z^2+2\nu\left(z^2-1\right)-4\lambda+5}{\left(z^2-1\right)}\frac{\partial C_\nu^{\lambda-1}(z)}{\partial\nu}+\frac{\left(\nu+2\lambda-4\right)\left(\nu+2\lambda-3\right)}{2\left(z^2-1\right)\left(\lambda-2\right)}\frac{\partial C_\nu^{\lambda-2}(z)}{\partial\nu}+\\ +2C_\nu^{\lambda-1}(z)+\frac{\left(2\nu+4\lambda-7\right)}{2\left(z^2-1\right)\left(\lambda-2\right)}C_\nu^{\lambda-2}(z)\end{array}\right\}$$

On remarque que la formule de récurrence n'est pas définie aux valeurs λ=1 et λ=2. Dans ces conditions par prudence, la récurrence ne peut débuter qu'avec les termes λ=1 et λ=2 pour déterminer l'expression λ=3. Appliquons donc cette récurrence sur les dérivées paramétriques déjà calculées. Commençons par la récurrence sur le degré 0 et la récurrence entre les ordres 1,2 donnant 3 :, il vient :

$$\frac{\partial C_0^1(z)}{\partial\nu}=z\frac{Arcos\left(z\right)}{\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\quad\frac{\partial C_0^2(z)}{\partial\nu}=\frac{1-2z^2}{2\left(1-z^2\right)}+\frac{3-2z^2}{2\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}}z\,Arcos\left(z\right)\quad C_0^1(z)=C_0^2(z)=1$$

$$\lambda=3\Rightarrow\frac{\partial C_0^3(z)}{\partial\nu}=\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\frac{4z^2-7}{\left(z^2-1\right)}\left[\frac{1-2z^2}{2\left(1-z^2\right)}+\frac{3-2z^2}{2\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}}z\,Arcos\left(z\right)\right]+\\ -\frac{3}{\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}}z\,Arcos\left(z\right)+2+\frac{5}{2\left(z^2-1\right)}\end{array}\right\}$$

$$Le\ résultat\ attendu\ est\ retrouvé\Rightarrow\frac{\partial C_0^3(z)}{\partial\nu}=\frac{3\left(2-7z^2+4z^4\right)}{8\left(1-z^2\right)^2}+\frac{z\left(15-20z^2+8z^4\right)Arcos\left(z\right)}{8\left(1-z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

.

Continuons par le degré 1 et la récurrence entre les ordres 1,2 donnant 3 :

$$C_1^1(z) = 2z \quad C_1^2(z) = 4z \quad \frac{\partial C_1^1(z)}{\partial \nu} = \frac{\left(2z^2-1\right)}{\sqrt{1-z^2}} Arcos(z) \quad \frac{\partial C_1^2(z)}{\partial \nu} = \frac{z\left(3-4z^2\right)}{2\left(1-z^2\right)} - \frac{\left(3-12z^2+8z^4\right)}{2\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}} Arcos(z)$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow \frac{\partial C_1^3(z)}{\partial \nu} = \frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} \frac{6z^2-9}{\left(z^2-1\right)}\left[\frac{z\left(3-4z^2\right)}{2\left(1-z^2\right)} - \frac{\left(3-12z^2+8z^4\right)}{2\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}} Arcos(z)\right] - \frac{6\left(2z^2-1\right)}{\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}} Arcos(z) + \\ +8z + \frac{7z}{\left(z^2-1\right)} \end{array}\right\}$$

$$Le\ résultat\ attendu\ est\ retrouvé \Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^3(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \frac{\left(29-72z^2+40z^4\right)z}{8\,(1-z^2)^2} + \frac{3\left(-5+30\,z^2-40\,z^4+16\,z^6\right)Arcos(z)}{8\,(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

.

<u>Hypothèse de récurrence des dérivées paramétriques des polynômes de Gegenbauer pour les ordres entiers</u>

Pour trouver une relation de récurrence sur les dérivées paramétriques des polynômes ultra-sphériques d'ordre entier, on tire profit d'une double récurrence sur les degrés et les ordres, à partir des relations suivantes déjà exposées auparavant :

Récurrence sur les ordres

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} C_n^\lambda(z) = \frac{1}{2(\lambda-1)}\left\{\frac{2(\lambda-1)z^2+2n\left(z^2-1\right)-4\lambda+5}{\left(z^2-1\right)} C_n^{\lambda-1}(z) + \frac{(n+2\lambda-4)(n+2\lambda-3)}{2\left(z^2-1\right)(\lambda-2)} C_n^{\lambda-2}(z)\right\} \\ \lambda > 2 \end{array}\right.$$

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} \left(z^2-1\right)\frac{\partial C_n^\lambda(z)}{\partial \nu} = \frac{1}{2(\lambda-1)}\left\{\begin{array}{l} \left(2(\lambda-1)z^2+2n\left(z^2-1\right)-4\lambda+5\right)\frac{\partial C_n^{\lambda-1}(z)}{\partial \nu} + \frac{(n+2\lambda-4)(n+2\lambda-3)}{2(\lambda-2)}\frac{\partial C_n^{\lambda-2}(z)}{\partial \nu} + \\ +2\left(z^2-1\right)C_n^{\lambda-1}(z) + \frac{(2n+4\lambda-7)}{2(\lambda-2)} C_n^{\lambda-2}(z) \end{array}\right\} \\ \lambda > 2 \end{array}\right.$$

Récurrence sur les degrés

$$(3) \quad C_n^\lambda(z) = \frac{2(\lambda+n-1)zC_{n-1}^\lambda(z) - (2\lambda+n-2)C_{\nu-2}^\lambda(z)}{n}$$

$$(4) \quad \frac{\partial C_n^\lambda(z)}{\partial \nu} = \frac{2(\lambda+n-1)z\frac{\partial C_{n-1}^\lambda(z)}{\partial \nu} - (2\lambda+n-2)\frac{\partial C_{n-2}^\lambda(z)}{\partial \nu} - C_n^\lambda(z) + 2zC_{n-1}^\lambda(z) - C_{n-2}^\lambda(z)}{n}$$

On détermine d'abord les départs de récurrence sur les ordres pour les degrés 0 et 1 :

$$C_0^1(z)=C_0^2(z)=C_0^3(z)=1 \quad \frac{\partial C_0^1(z)}{\partial \nu}=z\frac{Arcos(z)}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \frac{\partial C_0^2(z)}{\partial \nu}=\frac{1-2z^2}{2(1-z^2)}+z\frac{3-2z^2}{2(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}Arcos(z)$$

$$\frac{\partial C_0^3(z)}{\partial \nu}=\frac{3(2-7z^2+4z^4)}{8(1-z^2)^2}+z\frac{(15-20z^2+8z^4)}{8(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}Arcos(z)$$

$$C_1^1(z)=2z \quad C_1^2(z)=4z \quad C_1^3(z)=6z \quad \frac{\partial C_1^1(z)}{\partial \nu}=\frac{(2z^2-1)}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}Arcos(z)$$

$$\frac{\partial C_1^2(z)}{\partial \nu}=z\frac{(3-4z^2)}{2(1-z^2)}-\frac{(3-12z^2+8z^4)}{2(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}Arcos(z)$$

$$\frac{\partial C_1^3(z)}{\partial \nu}=z\frac{(29-72z^2+40z^4)}{8(1-z^2)^2}+\frac{3(-5+30z^2-40z^4+16z^6)}{8(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}Arcos(z)$$

Si l'on émet l'hypothèse d'expressions pour les dérivées premières paramétriques au degré 0 :

$$\frac{\partial C_0^\lambda(z)}{\partial \nu}=\frac{D_0^\lambda(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-1}}+z\frac{E_0^\lambda(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z) \quad Avec \quad \begin{cases} D_0^\lambda(z^2) \text{ polynômes en } z^2 \text{ de degré } 2(\lambda-1) \\ E_0^\lambda(z^2) \text{ polynômes en } z^2 \text{ de degré } 2(\lambda-1) \end{cases}$$

$$\frac{\partial C_1^\lambda(z)}{\partial \nu}=z\frac{D_1^\lambda(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-1}}+\frac{E_1^\lambda(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z) \quad Avec \quad \begin{cases} D_1^\lambda(z^2) \text{ polynômes en } z^2 \text{ de degré } 2(\lambda-1) \\ E_1^\lambda(z^2) \text{ polynômes en } z^2 \text{ de degré } 2\lambda \end{cases}$$

Les deux premières dérivées paramétriques sur les ordres 1 et 2, respectent ces deux expressions:

$$D_0^1(z^2)=0 \quad E_0^1(z^2)=1 \quad D_0^2(z^2)=\frac{1-2z^2}{2} \quad E_0^2(z^2)=\frac{3-2z^2}{2}$$

$$D_1^1(z^2)=0 \quad E_1^1(z^2)=2z^2-1 \quad D_1^2(z^2)=\frac{3-4z^2}{2} \quad E_1^2(z^2)=-\frac{3-12z^2+8z^4}{2}$$

Le report de cette forme dans l'expression de récurrence donne les récurrences suivantes :

$$(z^2-1)\left[\begin{array}{l}\dfrac{D_0^\lambda(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-1}}+ \\ +z\dfrac{E_0^\lambda(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\end{array}\right]=\frac{1}{2(\lambda-1)}\left\{\begin{array}{l}(2(\lambda-1)z^2-4\lambda+5)\left[\dfrac{D_0^{\lambda-1}(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-2}}+z\dfrac{E_0^{\lambda-1}(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-\frac{3}{2}}}Arcos(z)\right]+ \\ +(2\lambda-3)\left[\dfrac{D_0^{\lambda-2}(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-1}}+z\dfrac{E_0^{\lambda-2}(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-\frac{5}{2}}}Arcos(z)\right]+ \\ +2(z^2-1)+\dfrac{(4\lambda-7)}{2(\lambda-2)}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E_0^\lambda(z^2)=-\dfrac{1}{2(\lambda-1)}\left\{(2(\lambda-1)z^2-4\lambda+5)E_0^{\lambda-1}(z^2)+(1-z^2)(2\lambda-3)E_0^{\lambda-2}(z^2)\right\} \\ D_0^\lambda(z^2)=-\dfrac{1}{2(\lambda-1)}\left\{\begin{array}{l}(2(\lambda-1)z^2-4\lambda+5)D_0^{\lambda-1}(z^2)+(1-z^2)(2\lambda-3)D_0^{\lambda-2}(z^2)- \\ -2(1-z^2)^{\lambda-1}+\dfrac{(4\lambda-7)}{2(\lambda-2)}(1-z^2)^{\lambda-2}\end{array}\right\} \end{cases} \quad \lambda>2$$

Ces récurrences prouvent par évidence que les polynômes $D_0^\lambda(z^2)$, $E_0^\lambda(z^2)$ *restent dépendant en* z^2 *et de degré respectif comme indiqué ci dessus.*

Pour la récurrence sur le degré 1 :

$$\left(z^2-1\right)\left[\begin{array}{l} z\dfrac{D_1^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}}+ \\ +\dfrac{E_1^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\end{array}\right]=\frac{1}{2(\lambda-1)}\left\{\begin{array}{l}\left(2\lambda z^2+3-4\lambda\right)\left[z\dfrac{D_1^{\lambda-1}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-2}}+\dfrac{E_1^{\lambda-1}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{3}{2}}}Arcos(z)\right]+ \\ +\dfrac{(2\lambda-3)(2\lambda-2)}{2(\lambda-2)}\left[z\dfrac{D_1^{\lambda-2}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}}+\dfrac{E_1^{\lambda-2}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{5}{2}}}Arcos(z)\right]+ \\ -4z(\lambda-1)\left(1-z^2\right)+z(4\lambda-5)\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} E_1^{\lambda}(z^2)=-\dfrac{1}{2(\lambda-1)}\left\{\left(2\lambda z^2+3-4\lambda\right)E_0^{\lambda-1}(z^2)+\left(1-z^2\right)\dfrac{(2\lambda-3)(\lambda-1)}{(\lambda-2)}E_0^{\lambda-2}(z^2)\right\} \\ D_1^{\lambda}(z^2)=-\dfrac{1}{2(\lambda-1)}\left\{\begin{array}{l}\left(2\lambda z^2+3-4\lambda\right)D_0^{\lambda-1}(z^2)+\left(1-z^2\right)\dfrac{(2\lambda-3)(2\lambda-2)}{2(\lambda-2)}D_0^{\lambda-2}(z^2)+ \\ -4(\lambda-1)\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}+(4\lambda-5)\left(1-z^2\right)^{\lambda-2}\end{array}\right\}\end{array}\right. \quad \lambda\geq 2$$

La encore ces expressions prouvent par évidence que les polynômes $D_1^{\lambda}(z^2)$, $E_1^{\lambda}(z^2)$ *restent dépendant en* z^2 *et de degré respectif comme indiqué.*

Appliquons la référence pour le degré 2 :

$$2\frac{\partial C_2^{\lambda}(z)}{\partial\nu}=2(\lambda+1)z\frac{\partial C_1^{\lambda}(z)}{\partial\nu}-2\lambda\frac{\partial C_0^{\lambda}(z)}{\partial\nu}-C_2^{\lambda}(z)+2zC_1^{\lambda}(z)-C_0^{\lambda}(z)$$

$$2\frac{\partial C_2^{\lambda}(z)}{\partial\nu}=\left\{\begin{array}{l}2(\lambda+1)z\left[z\dfrac{D_1^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}}+\dfrac{E_1^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\right]-2\lambda\left[\dfrac{D_0^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}}+z\dfrac{E_0^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\right]- \\ -C_2^{\lambda}(z)+2zC_1^{\lambda}(z)-C_0^{\lambda}(z)\end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial C_2^{\lambda}(z)}{\partial\nu}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}}\dfrac{2(\lambda+1)z^2D_1^{\lambda}(z^2)-2\lambda D_0^{\lambda}(z^2)}{2}+z\dfrac{Arcos(z)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\dfrac{2(\lambda+1)E_1^{\lambda}(z^2)-2\lambda E_0^{\lambda}(z^2)}{2}- \\ -C_2^{\lambda}(z)+2zC_1^{\lambda}(z)-C_0^{\lambda}(z)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial C_2^{\lambda}(z)}{\partial\nu}=\frac{D_2^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}}+z\frac{E_2^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}D_2^{\lambda}(z^2)=\dfrac{2(\lambda+1)z^2D_1^{\lambda}(z^2)-2\lambda D_0^{\lambda}(z^2)}{2}+\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}\left(-C_2^{\lambda}(z)+2zC_1^{\lambda}(z)-C_0^{\lambda}(z)\right) \\ E_2^{\lambda}(z^2)=\dfrac{2(\lambda+1)E_1^{\lambda}(z^2)-2\lambda E_0^{\lambda}(z^2)}{2}\end{array}\right.$$

$$C_2^{\lambda}(z)=C_2^{\lambda}(-z)\Rightarrow C_2^{\lambda}(z)\ \textit{polynôme en}\ z^2\quad C_1^{\lambda}(z)=2\lambda z\quad C_0^{\lambda}(z)=1$$

On peut alors émettre l'hypothèse de récurrence générale suivante :

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2n} &= \frac{D_{2n}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}} + z\frac{E_{2n}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\\ \left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2n+1} &= z\frac{D_{2n+1}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}} + \frac{E_{2n+1}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\end{aligned}\right\}\quad Avec\quad \begin{cases} D_{2n}^\lambda(z^2)\ \text{polynômes en } z^2 \text{ de degré } 2(\lambda-1)+2n\\ E_{2n}^\lambda(z^2)\ \text{polynômes en } z^2 \text{ de degré } 2(\lambda-1)+2n\\ D_{2n+1}^\lambda(z^2)\ \text{polynômes en } z^2 \text{ de degré } 2(\lambda-1)+2n\\ E_{2n+1}^\lambda(z^2)\ \text{polynômes en } z^2 \text{ de degré } 2\lambda+2n\end{cases}$$

Ce qui les relations de récurrence sur les polynômes D et E :

$$2n\frac{\partial C_{2n}^\lambda(z)}{\partial \nu} = 2(\lambda+2n-1)z\frac{\partial C_{2n-1}^\lambda(z)}{\partial \nu} - (2\lambda+2n-2)\frac{\partial C_{2n-2}^\lambda(z)}{\partial \nu} - C_{2n}^\lambda(z) + 2zC_{2n-1}^\lambda(z) - C_{2n-2}^\lambda(z)$$

$$\Rightarrow 2n\left\{\frac{D_{2n}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}} + z\frac{E_{2n}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\right\} = \left\{\begin{aligned} &2(\lambda+2n-1)z\left[z\frac{D_{2n-1}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}} + \frac{E_{2n-1}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\right] -\\ &-(2\lambda+2n-2)\left[\frac{D_{2n-2}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}} + z\frac{E_{2n-2}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\right] -\\ &-C_{2n}^\lambda(z) + 2zC_{2n-1}^\lambda(z) - C_{2n-2}^\lambda(z)\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{2n}^\lambda(z^2) = \dfrac{2(\lambda+2n-1)z^2D_{2n-1}^\lambda(z^2) - (2\lambda+2n-2)D_{2n-2}^\lambda(z^2) + \left(1-z^2\right)^{\lambda-1}\left\{-C_{2n}^\lambda(z) + 2zC_{2n-1}^\lambda(z) - C_{2n-2}^\lambda(z)\right\}}{2n}\\ E_{2n}^\lambda(z^2) = \dfrac{2(\lambda+2n-1)E_{2n-1}^\lambda(z^2) - (2\lambda+2n-2)E_{2n-2}^\lambda(z^2)}{2n}\end{cases}$$

$$(2n+1)\frac{\partial C_{2n+1}^\lambda(z)}{\partial \nu} = 2(\lambda+2n)z\frac{\partial C_{2n}^\lambda(z)}{\partial \nu} - (2\lambda+2n-1)\frac{\partial C_{2n-1}^\lambda(z)}{\partial \nu} - C_{2n+1}^\lambda(z) + 2zC_{2n}^\lambda(z) - C_{2n-1}^\lambda(z)$$

$$\Rightarrow (2n+1)\left\{z\frac{D_{2n+1}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}} + \frac{E_{2n+1}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\right\} = \left\{\begin{aligned} &2(\lambda+2n)z\left[\frac{D_{2n}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}} + z\frac{E_{2n}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\right] -\\ &-(2\lambda+2n-1)\left[z\frac{D_{2n-1}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}} + \frac{E_{2n-1}^\lambda(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\right] -\\ &-C_{2n+1}^\lambda(z) + 2zC_{2n}^\lambda(z) - C_{2n-1}^\lambda(z)\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{2n+1}^\lambda(z^2) = \dfrac{2(\lambda+2n)D_{2n}^\lambda(z^2) - (2\lambda+2n-1)D_{2n-1}^\lambda(z^2) + \left(1-z^2\right)^{\lambda-1}\dfrac{\left\{-C_{2n+1}^\lambda(z) + 2zC_{2n}^\lambda(z) - C_{2n-1}^\lambda(z)\right\}}{z}}{2n+1}\\ E_{2n+1}^\lambda(z^2) = \dfrac{2(\lambda+2n)z^2E_{2n}^\lambda(z^2) - (2\lambda+2n-1)E_{2n-1}^\lambda(z^2)}{2n+1}\end{cases}$$

$$Comme\ C_{2n+1}^\lambda(z), C_{2n-1}^\lambda(z)\ \text{polynômes impairs} \Rightarrow \frac{\left\{-C_{2n+1}^\lambda(z) + 2zC_{2n}^\lambda(z) - C_{2n-1}^\lambda(z)\right\}}{z}\ \text{polynôme pair fonction de } z^2$$

Les degrés des polynômes suivent des expressions de récurrence ci-dessus .

<u>Application au calcul des fonctions de Gegenbauer de deuxième espèce degrés quelconque et d'ordre entier</u>

A partir des formules établies précédemment pour le calcul des fonctions de Gegenbauer de deuxième espèce de degré entier, on en déduit leur expression générale à partir des polynômes E.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial C_{2n}^{\lambda}(z)}{\partial \nu}=\dfrac{D_{2n}^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}}+z\dfrac{E_{2n}^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\\ \dfrac{\partial C_{2n+1}^{\lambda}(z)}{\partial \nu}=z\dfrac{D_{2n+1}^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-1}}+\dfrac{E_{2n+1}^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)\end{cases} \quad comme \quad \begin{cases}C_{(Q),2n}^{\lambda}(z)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial C_{2n}^{\lambda}(z)}{\partial \nu}-\dfrac{\partial C_{2n}^{\lambda}(-z)}{\partial \nu}\right)\\ C_{(Q),2n+1}^{\lambda}(z)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial C_{2n+1}^{\lambda}(z)}{\partial \nu}+\dfrac{\partial C_{2n+1}^{\lambda}(-z)}{\partial \nu}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_{(Q),2n}^{\lambda}(z)=\dfrac{1}{2}\left(z\dfrac{E_{2n}^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\left[Arcos(z)+Arcos(-z)\right]\right)=\dfrac{\pi}{2}z\dfrac{E_{2n}^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\\ C_{(Q),2n+1}^{\lambda}(z)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{E_{2n+1}^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\left[Arcos(z)+Arcos(-z)\right]\right)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{E_{2n+1}^{\lambda}(z^2)}{\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\end{cases}$$

<u>Table des polynômes</u> $D_{2n}^{\lambda}(z), D_{2n+1}^{\lambda}(z), E_{2n}^{\lambda}(z), E_{2n+1}^{\lambda}(z)$ *<u>ultra-sphériques pour des ordres entiers</u>*

Ordre : λ=1, Degré	*Polynômes ultra-sphériques* $D_{2n}^{\lambda}(z), D_{2n+1}^{\lambda}(z)$	*Polynômes ultra-sphériques* $E_{2n}^{\lambda}(z), E_{2n+1}^{\lambda}(z)$
n=0	$D_0^1(z)=0$	$E_0^1(z)=1$
n=1	$D_1^1(z)=0$	$E_1^1(z)=-1+2z^2$
n=2	$D_2^1(z)=0$	$E_2^1(z)=-3+4z^2$
n=3	$D_3^1(z)=0$	$E_3^1(z)=1-8z^2+8z^4$
n=4	$D_4^1(z)=0$	$E_4^1(z)=5-20z^2+16z^4$
n=5	$D_5^1(z)=0$	$E_5^1(z)=-1+18z^2-48z^4+32z^6$

Problèmes aux limites de Laplace sur une hypersphère- p-

Ordre : λ=2, Degré	*Polynômes ultra-sphériques* $D_{2n}^{\lambda}(z), D_{2n+1}^{\lambda}(z)$	*Polynômes ultra-sphériques* $E_{2n}^{\lambda}(z), E_{2n+1}^{\lambda}(z)$
n=0	$D_0^2(z)=\frac{1}{2}-z^2$	$E_0^2(z)=\frac{1}{2}(3-2z^2)$
n=1	$D_1^2(z)=\frac{3}{2}-2z^2$	$E_1^2(z)=\frac{1}{2}(-3+12z^2-8z^4)$
n=2	$D_2^2(z)=-\frac{1}{2}+4z^2-4z^4$	$E_2^2(z)=\frac{1}{2}(-15+40z^2-24z^4)$
n=3	$D_3^2(z)=-\frac{5}{2}+10z^2-8z^4$	$E_3^2(z)=\frac{1}{2}(5-60z^2+120z^4-64z^6)$
n=4	$D_4^2(z)=\frac{1}{2}-9z^2+24z^4-16z^6$	$E_4^2(z)=\frac{1}{2}(35-210z^2+336z^4-160z^6)$
n=5	$D_5^2(z)=\frac{7}{2}-28z^2+56z^4-32z^6$	$E_5^2(z)=\frac{1}{2}(-7+168z^2-672z^4+896z^6-384z^8)$

Ordre : λ=3, Degré	*Polynômes ultra-sphériques* $D_{2n}^{\lambda}(z), D_{2n+1}^{\lambda}(z)$	*Polynômes ultra-sphériques* $E_{2n}^{\lambda}(z), E_{2n+1}^{\lambda}(z)$
n=0	$D_0^3(z)=\frac{3}{8}(2-7z^2+4z^4)$	$E_0^3(z)=\frac{1}{8}(15-20z^2+8z^4)$
n=1	$D_1^3(z)=\frac{1}{8}(29-72z^2+40z^4)$	$E_1^3(z)=\frac{3}{8}(-5+30z^2-40z^4+16z^6)$
n=2	$D_2^3(z)=\frac{1}{8}(-10+115z^2-220z^4+112z^6)$	$E_2^3(z)=\frac{3}{8}(-35+140z^2-168z^4+64z^6)$
n=3	$D_3^3(z)=\frac{3}{8}(-23+134z^2-208z^4+96z^6)$	$E_3^3(z)=\frac{1}{8}(35-560z^2+1680z^4-1792z^6+640z^8)$
n=4	$D_4^3(z)=\frac{1}{8}(14-329z^2+1288z^4-1680z^6+704z^8)$	$E_4^3(z)=\frac{3}{8}(105-840z^2+2016z^4-1920z^6+640z^8)$
n=5	$D_5^3(z)=\frac{1}{8}(125-1312z^2+3872z^4-4352z^6+1664z^8)$	$E_5^3(z)=\frac{3}{8}(-21+630z^2-3360z^4+6720z^6-5760z^8+1792z^{10})$

Ordre : λ=4, Degré	*Polynômes ultra-sphériques* $D_{2n}^{\lambda}(z), D_{2n+1}^{\lambda}(z)$	*Polynômes ultra-sphériques* $E_{2n}^{\lambda}(z), E_{2n+1}^{\lambda}(z)$
n=0	$D_0^4(z) = \frac{1}{48}\left(44 - 219z^2 + 248z^4 - 88z^6\right)$	$E_0^4(z) = \frac{1}{16}\left(35 - 70z^2 + 56z^4 - 16z^6\right)$
n=1	$D_1^4(z) = \frac{1}{48}\left(295 - 1070z^2 + 1176z^4 - 416z^6\right)$	$E_1^4(z) = \frac{1}{16}\left(-35 + 280z^2 - 560z^4 + 448z^6 - 128z^8\right)$
n=2	$D_2^4(z) = \frac{1}{48}\left(-104 + 1559z^2 - 4398z^4 + 4432z^6 - 1504z^8\right)$	$E_2^4(z) = \frac{1}{16}\left(-315 + 1680z^2 - 3024z^4 + 2304z^6 - 640z^8\right)$
n=3	$D_3^4(z) = \frac{1}{48}\left(-917 + 7014z^2 - 16128z^4 + 14752z^6 - 4736z^8\right)$	$E_3^4(z) = -\frac{5}{16}\left(-21 + 420z^2 - 1680z^4 + 2688z^6 - 1920z^8 + 512z^{10}\right)$
n=4	$D_4^4(z) = \frac{1}{48}\left(188 - 5451z^2 + 28128z^4 - 54496z^6 + 45312z^8 - 13696z^{10}\right)$	$E_4^4(z) = -\frac{5}{16}\left(-231 + 2310z^2 - 7392z^4 + 10560z^6 - 7040z^8 + 1792z^{10}\right)$
n=5	$D_5^4(z) = \frac{1}{48}\left(2043 - 26538z^2 + 103488z^4 - 173088z^6 + 131456z^8 - 37376z^{10}\right)$	$E_5^4(z) = \frac{1}{16}\left(-231 + 8316z^2 - 55440z^4 + 147840z^6 - 190080z^8 + 118272z^{10} - 28672z^{12}\right)$

__Application aux calculs des normes des fonctions propres de problème aux limites ultra-sphériques__

On rappelle que pour des problèmes aux limites sur des hémisphères à N-dimensions, sur un cône ultra-sphérique d'angle d'ouverture droit ($\vartheta_0=\pi/2$), ce sont les polynômes de Gegenbauer de degré impair qui forme une base de fonctions propres. Le résultat suivant sur la dérivée paramétrique constitue le départ de récurrence pour le calcul de toutes les autres dérivées paramétriques, à la valeur z=0 et servant au calcul de la norme des fonctions propres :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\substack{\nu=1\\ z=0}} = -\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} \quad \forall\lambda \quad \textit{entier ou demi}-\textit{entier}$$

La démonstration a été réalisée pour les ordres demi-entiers, qu'en est-il des ordres entiers. La formule est la suivante :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^p(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\pi\,\frac{p(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

La récurrence sur les ordres entiers en z=0 donne :

$$\textit{Récurrence sur les dérivées premières paramétriques de Gegenbauer d'ordre entier} \quad \lambda \in \mathbf{N} \quad \nu = 1, z = 0$$

$$\forall\lambda \quad C_1^\lambda(0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial C_1^\lambda(0)}{\partial \nu} = -\frac{1}{2(\lambda-1)}\left\{(3-4\lambda)\frac{\partial C_1^{\lambda-1}(0)}{\partial \nu} + \frac{(2\lambda-3)(\lambda-1)}{(\lambda-2)}\frac{\partial C_1^{\lambda-2}(0)}{\partial \nu}\right\}$$

$$\forall p \in \mathbf{N} \quad \frac{\partial C_1^p(0)}{\partial \nu} = \frac{(4p-3)}{2(p-1)}\frac{\partial C_1^{p-1}(0)}{\partial \nu} - \frac{(2p-3)}{2(p-2)}\frac{\partial C_1^{p-2}(0)}{\partial \nu}$$

La formule est respectée pour p=1 et p=2, supposons l'expression vraie pour p-1 et p-2, utilisons la récurrence :

$$\frac{\partial C_1^{p-1}(0)}{\partial \nu} = -\pi \frac{(p-1)(2p-2)!}{2^{2p-2}((p-1)!)^2} = -\pi \frac{(2p-2)!}{2^{2p-2}(p-2)!(p-1)!}$$

$$\frac{\partial C_1^{p-2}(0)}{\partial \nu} = -\pi \frac{(p-2)(2p-4)!}{2^{2p-4}((p-2)!)^2} = -\pi \frac{(2p-4)!}{2^{2p-4}(p-3)!(p-2)!}$$

$$\frac{\partial C_1^{p}(0)}{\partial \nu} = -\pi\left(\frac{(4p-3)}{2(p-1)}\frac{(2p-2)!}{2^{2p-2}(p-2)!(p-1)!} - \frac{(2p-3)}{2(p-2)}\frac{(2p-4)!}{2^{2p-4}(p-3)!(p-2)!}\right)$$

$$\frac{\partial C_1^{p}(0)}{\partial \nu} = -\pi\left(\frac{(4p-3)}{2(p-1)^2}\frac{(2p-2)!}{2^{2p-2}(p-2)!(p-2)!} - \frac{1}{(p-1)}\frac{(2p-2)!}{2^{2p-2}(p-2)!(p-2)!}\right)$$

$$\frac{\partial C_1^{p}(0)}{\partial \nu} = -\pi \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)!}{2^{2p-2}(p-2)!(p-2)!(p-1)2(p-1)2p} = -\pi \frac{p(2p!)}{2^{2p}(p!)^2} \quad c.q.f.d$$

La récurrence donne donc la bonne expression pour p. L'expression :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^{p}(0)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\pi \frac{p(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

est donc vérifiée !